Logo Ministerio de educación



**MATEMÁTICAS**

Guía de Apoyo Educativo en el área de las matemáticas.

Conceptos de los sistemas de ecuaciones y las funciones lineales y cuadráticas grado 9º de educación básica secundaria

Autor:

Adriana Quintero Palomino

**TABLA DE CONTENIDO**

[TEMA 1: FUNCIONES LINEALES 3](#_Toc429413160)

[1.1 FUNCIONES LINEALES 5](#_Toc429413161)

[1.2 ANÁLISIS DE UNA FUNCIÓN DE GRÁFICA LINEAL 9](#_Toc429413162)

[1.3 PENDIENTE DE UNA RECTA 12](#_Toc429413163)

[1.4 RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES 23](#_Toc429413164)

[Practica lo aprendido 32](#_Toc429413165)

[Prepárate Para El ICFES 39](#_Toc429413166)

[TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES 45](#_Toc429413167)

[2.1 SISTEMAS DE ECUACIONES 46](#_Toc429413168)

[2.2 CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS 50](#_Toc429413169)

[2.3 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 54](#_Toc429413170)

[2.3.1 Método de Sustitución 58](#_Toc429413171)

[2.3.2 Método de Igualación 64](#_Toc429413172)

[2.3.3 Método de Reducción 70](#_Toc429413173)

[2.3.4 Ejemplos de casos especiales 78](#_Toc429413174)

[2.3.5 Método Gráfico 84](#_Toc429413175)

[2.4 APLICACIONES PRÁCTICAS 90](#_Toc429413176)

[Práctica lo aprendido 98](#_Toc429413177)

[TEMA 3: DETERMINANTES 108](#_Toc429413178)

[3.1 REGLA DE CRAMER 110](#_Toc429413179)

[Practica lo aprendido 114](#_Toc429413180)

[Prepárate para el ICFES 117](#_Toc429413181)

[Curiosidades Matemáticas 119](#_Toc429413182)

[TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES 3 X 3 120](#_Toc429413183)

[4.1 MÉTODO DE IGUALACIÓN 122](#_Toc429413184)

[4.2 MÉTODO DE SUMA Y RESTA 127](#_Toc429413185)

[4.3 REGLA DE CRAMER 130](#_Toc429413186)

[Practica lo aprendido 135](#_Toc429413187)

[Prepárate para el ICFES 139](#_Toc429413188)

[TEMA 5: FUNCIÓN CUADRÁTICA 142](#_Toc429413189)

[5.1 FUNCIONES CUADRÁTICA DE LA FORMULA 144](#_Toc429413190)

[5.1.1 Representación gráfica de la función  147](#_Toc429413191)

[5.1.2 Traslaciones de la función  150](#_Toc429413192)

[5.1.3 Traslaciones en cualquier dirección 158](#_Toc429413193)

[5.2 OTRA FORMA DE EXPRESAR UNA FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO 166](#_Toc429413194)

[5.2.1 Gráfico de la función polinómica  167](#_Toc429413195)

[5.2.2 Vértice de la parábola 172](#_Toc429413196)

[5.3 DISCRIMINANTE 179](#_Toc429413197)

[Practica lo aprendido 181](#_Toc429413198)

**TABLA DE IMÁGENES**

[Imagen 1: Plano Cartesiano 7](#_Toc429413254)

[Imagen 2: Desplazamiento Automóvil. 10](#_Toc429413255)

[Imagen 3: Gráfico Lineal Distancia - Tiempo 11](#_Toc429413256)

[Imagen 4: Gráfica de la función. 13](#_Toc429413257)

[Imagen 5: Gráfica de f(x) = 5 - 4x 15](#_Toc429413258)

[Imagen 6: Gráfica de la función f(x) = 2x + 1 16](#_Toc429413259)

[Imagen 7: Gráfica de la función y = ****x + 3 17](#_Toc429413260)

[Imagen 8: Gráfica de la función y = -3x - 1. 18](#_Toc429413261)

[Imagen 9: Pendiente de una recta. 19](#_Toc429413262)

[Imagen 10: Recta con pendiente m=2. 21](#_Toc429413263)

[Imagen 11: Rectas Paralelas 27](#_Toc429413264)

[Imagen 12: Rectas Secantes. 28](#_Toc429413265)

[Imagen 13: Rectas Perpendiculares 28](#_Toc429413266)

[Imagen 14: Gráfica de Rectas. 30](#_Toc429413267)

[Imagen 15: Gráfico de las rectas. 32](#_Toc429413268)

[Imagen 16: Rectas Paralelas y Perpendiculares. 34](#_Toc429413269)

[Imagen 17: Ejercicio a. 40](#_Toc429413270)

[Imagen 18: Ejercicio b. 40](#_Toc429413271)

[Imagen 19: Gráfica de la función Lineal 51](#_Toc429413272)

[Imagen 20: Sistema Compatible Determinado 54](#_Toc429413273)

[Imagen 21: Sistema Incompatible 55](#_Toc429413274)

[Imagen 22: Sistema Compatible Indeterminado. 56](#_Toc429413275)

[Imagen 23: Rectas Secantes 57](#_Toc429413276)

[Imagen 24: Mapa Conceptual 59](#_Toc429413277)

[Imagen 25: Rectas Secantes 90](#_Toc429413278)

[Imagen 26: Rectas Paralelas 92](#_Toc429413279)

[Imagen 27: Gráfico de área respecto al lado. 146](#_Toc429413280)

[Imagen 28: Gráfico de los puntos x y su cuadrado. 149](#_Toc429413281)

[Imagen 29: Parábolas con coeficiente a positivo. 151](#_Toc429413282)

[Imagen 30: Parábolas con coeficiente a negativo. 152](#_Toc429413283)

[Imagen 31: Curva desplazada sobre el eje y. 156](#_Toc429413284)

[Imagen 32: Desplazamientos sobre el eje x. 160](#_Toc429413285)

[Imagen 33: Parábolas desplazadas en ambos ejes. 164](#_Toc429413286)

[Imagen 34: Parábola desplazada sobre el eje y 165](#_Toc429413287)

[Imagen 35: Puntos Característicos 178](#_Toc429413288)

[Imagen 36: Gráfica de la función. 181](#_Toc429413289)

[Imagen 37: Dos cortes con el eje x 183](#_Toc429413290)

[Imagen 38: Un corte con el eje x. 183](#_Toc429413291)

[Imagen 39: Sin cortes con el eje x. 184](#_Toc429413292)

[Imagen 40: Relación x, y 185](#_Toc429413293)

**TABLA DE TABLAS**

[Tabla 1: Relación Tiempo - Desplazamiento 10](#_Toc429413326)

[Tabla 2: Tabulación de Puntos. 12](#_Toc429413327)

[Tabla 3: Relación Artículo - Cantidad 120](#_Toc429413328)

[Tabla 4: Componentes por Cápsula 124](#_Toc429413329)

[Tabla 5: Lado y Área 145](#_Toc429413330)

[Tabla 6: Valor de x y su cuadrado 148](#_Toc429413331)

[Tabla 7: Desplazamientos sobre el eje y 154](#_Toc429413332)

[Tabla 8: X y su valor al cuadrado. 158](#_Toc429413333)

[Tabla 9: Desplazamiento negativo sobre el eje x. 159](#_Toc429413334)

[Tabla 10: Desplazamiento positivo sobre el eje x. 159](#_Toc429413335)

# TEMA 1: FUNCIONES LINEALES

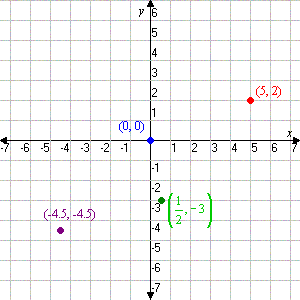
**Marco histórico**

Nació el 31 de Marzo de 1596 en La Haye, Touraine, Francia y falleció el 11 de febrero de 1650 en Estocolmo, Suecia. Descartes contribuyó a crear la llamada "Edad de la Razón”.

Descartes nació en una familia francesa noble en la Turena, y fue el tercero y último hijo de la pri­mera esposa de su padre, quien murió poco después de su nacimiento. Su padre hizo todo lo posible por compensar a sus hijos la pérdida de su madre.

Uno de los más grandes aportes de Descartes es el útil sistema de coordenadas cartesianas.

Imagen 1: Plano Cartesiano



**Descripción Imagen:** Recta numérica con los números enteros resaltados en ella, en el cero la atraviesa otra recta numérica dibujada de manera vertical, se cortan en el punto 0 de cada una de ella, este es el plano cartesiano. Estás rectas generan cuatro regiones que se denominan cuadrantes en cada una de estos hay un par ordenado de números. Los cuadrantes se numeran de derecha a izquierda. En el primero está el punto (5, 2) resaltado. En el tercer cuadrante está resaltado el punto (-4.5, 4.5) y en el cuarto cuadrante está resaltado el punto (1/2, -3). El punto (0, 0) también está resaltado.

Un aya excelente ayudó al débil y enfermizo Rene a sobrevivir; quien creció para convertirse en un niño pálido y serio, que siem­pre deseaba conocer la causa de todas las cosas que existían bajo el Sol. Debido a la mala salud de su hijo, su padre aplazó la educa­ción formal hasta que llegó a la edad de ocho años. Entonces esco­gió el colegio jesuita de La Fleche como la escuela ideal. El rector se encariñó enseguida con el pálido y confiado niño y decidió que necesitaba ayudar a fortalecer el cuerpo del pequeño si quería edu­car su mente. Como Rene parecía requerir más descanso que los niños normales de su edad, se le permitía levantarse tan tarde como quisiera antes de reunirse con sus condiscípulos. Durante su vida, Descartes siguió esta costumbre de levantarse tarde después de pasar tranquilamente la mañana en silenciosa meditación. Cursó estudios normales de lógica, ética, metafísica, historia, ciencias y literatura. Luego se dedicó a trabajar independientemente en el álgebra y geometría, que se convirtieron en sus materias favoritas. Prosiguió sus estudios en la Universidad de Poitiers, donde cursó las materias de derecho. En cuanto recibió su diploma, "abandonó del todo el estudio de las letras y resolvió no aspirar ya a ninguna otra ciencia que no fuera el conocimiento de sí mismo o de los grandes libros del mundo”.

En el 1629 decidió irse a vivir a Holanda, allí estudió otras cosas aparte de filosofía y las matemáticas, comprendiendo la óptica, la física, la química, la anatomía y la medicina. El 8 de Junio de 1637 Descartes dio al mundo su geometría analítica como un apén­dice modesto de su obra maestra Discurso del método. En 1649 Descartes enfermó de gravedad y murió probablemente de pulmo­nía. Diecisiete años más tarde, su cadáver volvió a París, donde fue sepultado en lo que hoy es el panteón.

## FUNCIONES LINEALES

1. Gráfica las siguientes funciones (remplaza x en cada función por los siguientes valores: x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)
2. Y = 3x + 1
3. Y = 2 – 3
4. f(x) = 2x – 5
5. Identifica las características que presentan las siguientes funciones:
6. f(x) = 3x
7. y = x + 4
8. y=5
9. f(x) = 2 - 3x

¿Qué conclusiones podemos sacar de los ejercicios anteriores?

Todas las funciones, excepto f(x) = 2 - 3 se representan gráficamente por medio de una línea recta, y su estructura es:

f(x) = mx + b o en forma análoga: y = mx+b

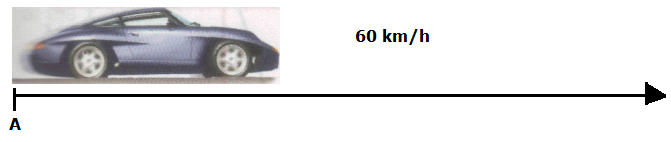
Estas funciones reciben el nombre de FUNCIONES DE GRÁFICA LINEAL

El concepto de función de gráfica lineal

Consideremos el siguiente problema:

Un automóvil sale de una ciudad A a una velocidad constante de 60 km/h. ¿A qué distancia de la ciudad se encontrará el automóvil al cabo de 1 hora, 2 horas, 3 horas, etc.?

Imagen 2: Desplazamiento Automóvil.



**Descripción Imagen:** Segmento de recta que inicia en el punto A a la izquierda y termina en punta de flecha. Sobre el segmento de recta está dibujado un automóvil y el letrero 60 km/h. La imagen grafica la situación descrita en el ejemplo a desarrollar.

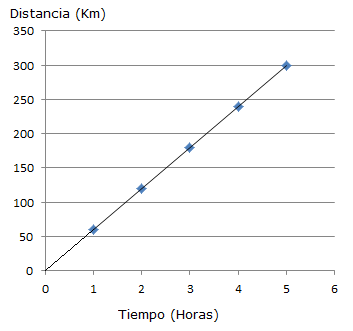
Para poder darle solución al problema, vamos a realizar una tabla de datos:

Tabla 1: Relación Tiempo - Desplazamiento

| Tiempo | Distancia |
| --- | --- |
| 1 | 60 |
| 2 | 120 |
| 3 | 180 |
| 4 | 240 |
| 5 | 300 |
| … | … |
| x | 60x |
| … | … |

Vemos que en cada hora, la distancia recorrida por el automóvil se halla multiplicando la distancia recorrida en una hora por el número de horas transcurridas en cada momento. Por lo tanto, para cualquier tiempo t la distancia equivale a 60t. Entonces podemos decir que la distancia se encuentra en función del tiempo. Esto se representa simbólicamente como D = f (t) = 60t siendo D la distancia, y t el tiempo. La representación gráfica de esta situación es la siguiente:

Imagen 3: Gráfico Lineal Distancia - Tiempo



**Descripción Imagen:** Primer cuadrante del plano cartesiano en el cual está graficada la recta que une los puntos del tiempo en el eje x con los puntos de la distancia en el eje y. Es la línea que relaciona el tiempo con la distancia.

De todo lo anterior, podemos dar la siguiente definición:

Una función de gráfica lineal es aquella que tiene la forma f(x) = mx + b y su gráfica es una línea recta.

## ANÁLISIS DE UNA FUNCIÓN DE GRÁFICA LINEAL

**Intersecciones con los ejes**

**Ejemplos**

1. Sea f(x) = 3x + 2 una función de gráfica lineal. Realizar la gráfica de esta función y encontrar los puntos de corte con los ejes del plano cartesiano.

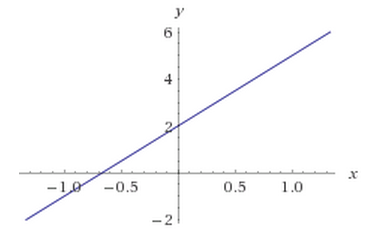
**Solución:**

Tabulamos algunos puntos:

Tabla 2: Tabulación de Puntos.

| X | f(x) |
| --- | --- |
| -2 | -4 |
| 1 | 5 |
| 3 | 11 |

Imagen 4: Gráfica de la función.

****

**Descripción Imagen:** Recta que describe la ecuación f(x) = 3x + 2, está recta une los puntos (-2, -4), pasa por el punto (0, 2).

Para encontrar las intersecciones con los ejes se pro­cede de la siguiente manera:

* **Intersección con el eje x:** En este punto, el valor de y es cero (x, 0), por lo tanto:

Si y = 0

0 = 3x + 2

3x = -2

X = 

* **Intersección con el eje y:** Para este punto la componente x se hace cero: ( 0, y)

Si x = 0

y =3\*0 + 2

y = 2

1. Hallar los intersectos con los ejes coordenados de la función f(x) = 5 - 4x.

Para hallar el intersecto con el eje x, hacemos y = 0, de tal forma que la expresión se convierte en:

0 = 5 - 4x

De donde:

4x = 5

Cuya solución es:

x = 

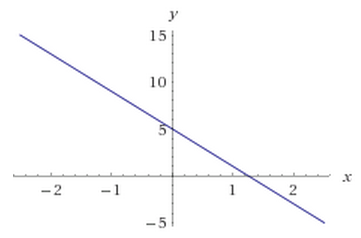
De otro lado si x = 0

Y = 5 – 4\*0

Y = 5

Los puntos de corte con los ejes son (0, 5) y (, 0).

Imagen 5: Gráfica de f(x) = 5 - 4x



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano con grafica de la recta f(x) = 5 - 4x que pasa por los puntos (0, 5) y (, 0).

## PENDIENTE DE UNA RECTA

Todas las funciones lineales tienen en común su estructura algebraica (ya sea y = mx + b ó Ax + By + C = 0) además de su forma gráfica. Pero cada una de estas rectas muestra una característica propia y es su inclinación con respecto al eje de las abscisas (eje x).

Este grado de inclinación con respecto al eje x recibe el nombre de Pendiente de la recta.

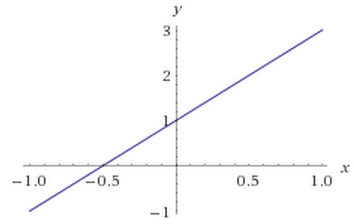
En la ecuación y = mx + b la pendiente se identifica fácilmente ya que es la constante que acompaña a x, es decir el valor nu­mérico m. Esta cantidad nos indica la inclinación de la recta con respecto al eje x.

La pendiente de algunas caídas de agua se aprovecha en la generación de energía.

**Ejemplos:**

1. f(x) = 2x +1

Imagen 6: Gráfica de la función f(x) = 2x + 1



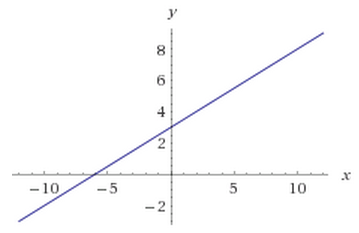
**Descripción Imagen:** Plano cartesiano con grafica de la recta f(x) = 2x + 1 que pasa por los puntos (0, 1) y (-, 0).

Pendiente m = 2

1. x - 2y + 6 = 0

y = x + 3

Imagen 7: Gráfica de la función y = x + 3



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano con grafica de la recta y = x + 3 que pasa por los puntos (0, 3) y (-7, 0).

Pendiente m = 

1. y = - 3x – 1

Imagen 8: Gráfica de la función y = -3x - 1.

Gráfica de línea recta sobre el plano cartesiano que describe el comportamiento de la función.

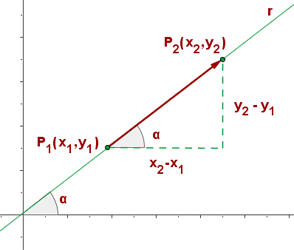

**Descripción Imagen:** Plano cartesiano con grafica de la recta y = -3x – 1 que pasa por los puntos (-, 0) y (0, -1).

Pendiente m = -3.

**Cálculo de la pendiente de una recta**

Sean P=(x1, y1) y Q=(x2, y2) dos puntos cualesquie­ra, y r la recta que pasa por dichos puntos.

Imagen 9: Pendiente de una recta.



**Descripción Imagen:** Gráfica de recta en el plano cartesiano que pasa por el origen (el punto (0, 0), sobre la recta el segmento que une los puntos P1(x1, y1) y P2(x2, y2), tomando este segmento como hipotenusa se forma un triángulo rectángulo, el lado horizontal se identifica con x2 – x1 y el lado vertical con y2 – y1. En este gráfico se muestra la deducción de la pendiente de una recta.

La pendiente m de la recta r, se define como la razón entre la diferencia de los valores de y sobre los valores de x. La variación en y se expresa como:



y la variación en x se expresa como:



por lo tanto la razón entre estas diferencias se expresa mediante la igualdad:



**Ejemplos:**

1. Dados los puntos (3, 6) y (5, 10), hallar la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos.

Solución:

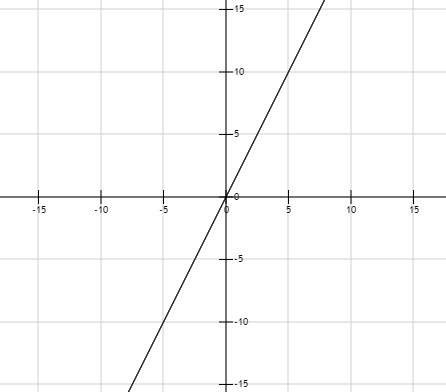
Tomemos el punto (3, 6) como  y el punto (5, 10) como . De acuerdo con la definición, el valor de la pendiente de la recta que pasa por estos puntos es:





m = 2

Imagen 10: Recta con pendiente m=2.



**Descripción Imagen:** Gráfica de la recta en el plano cartesiano que pasa por el punto (0, 0) y une los puntos (-5, -10) y (5, 10).

1. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-9, -6) y (2, -4).

Solución

De acuerdo con la definición se tiene que:







En muchas obras de arte el concepto de inclinación es útil para lograr estabilidad y estética.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Tomamos los puntos P y Q y la recta r, definidos anteriormente, y otro punto cualquiera A = (x, y) también de la recta r.

La pendiente determinada por P y Q es:



Calculemos ahora la pendiente de r a partir de puntos A y P:

Como A, P y Q son colineales, podemos afirmar que la pendiente considerando los puntos P y Q es igual a la pendiente considerando A y P.



Y al multiplicar los términos de esta igualdad por (x - ), obtenemos:





Con



Ecuación de la recta que pasa por dos puntos o ecuación punto - pendiente.



**Ejemplos**

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 10) y (-2, -2).

Solución:

Para encontrar esta ecuación, se busca el valor de la pendiente:



m = 2

Ahora, tomamos uno de los puntos dados y remplazamos las componentes del pun­to y el valor de la pendiente en la ecuación



(y - 10) = 2 (x - 4)

Y - 10 = 2x - 8

0 = 2x – 8 – y + 10

0 = 2x - y + 2

2x - y + 2 = 0

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (5, 9) y (7,16).

Solución:

Primero hallamos la pendiente de la recta:





Remplazamos un punto (5, 9) y m =  en la ecuación:



(y - 9) = (x - 5)

2 (y - 9) = 7(x - 5)

2y - 18 = 7x – 35

0 = 7x - 2y – 17

7x - 2y - 17 = 0 es la ecuación buscada.

## RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

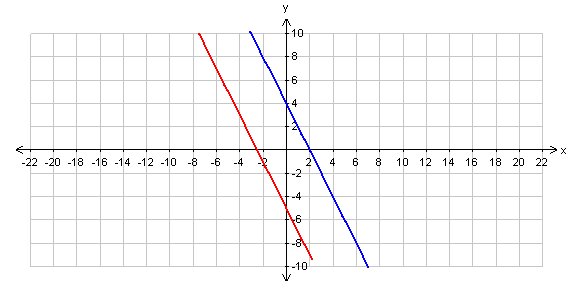
Sean:





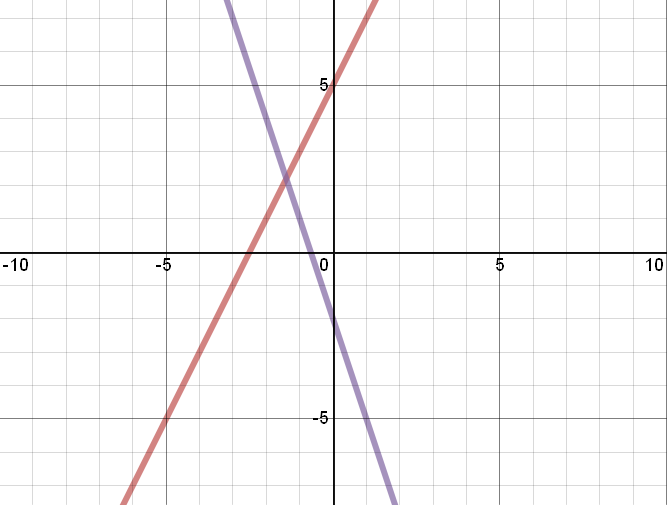
Dos funciones de gráfica lineal. En el plano cartesiano, las posiciones relativas de  y  pueden ser:

Imagen 11: Rectas Paralelas



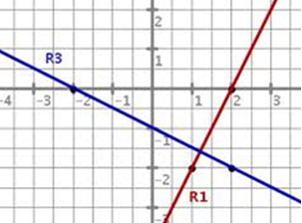
**Descripción Imagen:** Gráfica de dos rectas en el plano cartesiano que nunca se cortan dado que tienen la misma inclinación Estas rectas se denominan paralelas.

Imagen 12: Rectas Secantes.



**Descripción Imagen:** Gráfica de dos rectas en el plano cartesiano que se cortan en un punto. Estas rectas se denominan secantes.

Imagen 13: Rectas Perpendiculares



**Descripción Imagen:** Gráfica de dos rectas en el plano cartesiano que se cortan en un punto y forman un ángulo de 90 grados (un ángulo recto). Estas rectas se denominan perpendiculares.

Para determinar algebraicamente la posición de las rectas en el plano, se debe analizar el valor de la pendiente de cada una.

Para que las rectas  y  sean paralelas, la inclinación de ellas debe ser la misma, es decir, sus pendientes deben ser iguales.

Recíprocamente, si dos rectas tienen la misma pendiente, puede asegurarse que son paralelas.

**Ejemplos:**

1. Graficar las funciones lineales y determinar la posición que ocupan en el plano:
2. y = 3x + 5
3. y = 3x – 1

Solución

Para trazar la rectas basta con determinar dos puntos sobre cada una de ellas.

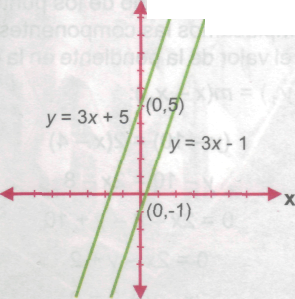
Si x = 0 en la recta cuya ecuación es y = 3x + 5, entonces el valor de y es 5.

Si x = 2, el valor de y es y = 3\*2 + 5 = 11

De otro lado, en la recta y = 3x - 1, si x = 0, y = -1, en tanto que si x = 1, y = 2

Al ubicar cada par de puntos y unirlos vemos que las dos rectas son paralelas.

Imagen 14: Gráfica de Rectas.



**Descripción Imagen:** Gráfica de las dos rectas y = 3x + 5, y = 3x – 1 en el mismo plano cartesiano. Estas rectas no se cortan en ningún punto, son paralelas.

1. Encontrar la posición relativa de las rectas cuyas ecuaciones son:
2. Y - 2x = 4
3. 2y + x - 5 = 0

Solución

Para graficar las rectas se procede de manera similar al ejemplo anterior, es decir, de­terminando dos puntos de cada una de ellas.

Para la primera recta y - 2x = 4.

* Si x = 0 tenemos que y = 4.
* Si x = 3 entonces y = 2\*3 + 4 = 10

Para determinar valores sobre la recta 2y + x - 5 = 0, conviene despejar la variable y.



Si remplazamos a x por 0 en esta expre­sión, tenemos que: y = , mientras que si x = 1,

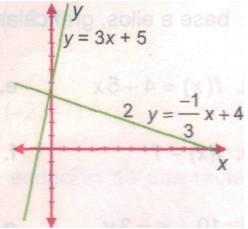


Al trazar las dos rectas se observa que son perpendiculares y además que el produc­to de sus pendientes es igual a -1.

En general, dos rectas de pendientes  y  son perpendiculares si:



Imagen 15: Gráfico de las rectas.



**Descripción Imagen:** Gráfica de dos rectas en el mismo plano cartesiano que se cortan en un punto formando un ángulo de 90 grados. Estas rectas son perpendiculares.

1. Sea 9x - 3y = -15 una recta del plano. Encon­trar la ecuación de una recta paralela y de una recta perpendicular a dicha recta.

Solución

Primero vamos a identificar el valor de la pen­diente de 9x - 3y = -15, transformándola a la forma y = mx + b:

9x- 3y = -15

-3y = -9x- 15

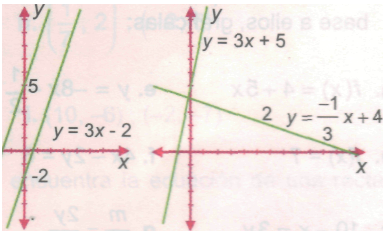


y = 3x + 5

De esa expresión se establece que la pen­diente de la recta es 3.

Para hallar una recta paralela, debemos te­ner en cuenta que la pendiente debe ser la misma, por ejemplo la recta y = 3x - 2 es paralela a y = 3x + 5

Imagen 16: Rectas Paralelas y Perpendiculares.



**Descripción Imagen:** Gráfica de dos plano cartesianos, en el primero el par de rectas y = 3x – 2, y = 3x + 5, éstas rectas son paralelas. En el segundo plano las rectas y = 3x + 5, y = - 1/3x + 4, éstas rectas son perpendiculares.

Para hallar la ecuación de una recta perpen­dicular, buscamos el valor de su pendiente .



De donde:



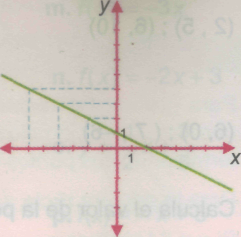
Teniendo la pendiente de la recta perpendicu­lar, podemos definirla con cualquier punto de corte al eje y. Esta ecuación puede ser:



### Practica lo aprendido

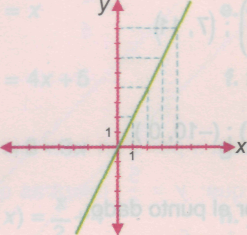
1. Traza las siguientes funciones de gráfica lineal:
2. y = x
3. y = 4x + 5
4. y = 8 - 3x
5. y = 
6. 4x + 3y = 8
7. f(x) = 5x – 4
8. f(x) = x + 
9. 3y + 9 = x
10. f(x) = 3x + 3
11. f(x) = -2x – 1
12. y = -2x + 4
13. f(x) =  + 4
14. f(x) = -3x
15. f(x) = -2x + 3
16. f(x) = - x + 6
17. y = 
18. Representa en forma de función las siguientes situaciones:
19. El costo de n artículos si cada uno tiene un valor de $ 3500.
20. La cantidad de viajes mensuales que realiza un camión si cada día realiza 6 viajes.
21. El recaudo por las entradas a un evento si cada una cuesta $ 8000.
22. ¿Es f(x) = k, siendo k un número real cualquiera, una función lineal?
23. ¿Cuántos puntos como mínimo se necesitan para graficar una función lineal?
24. Encuentra los puntos de intersección de cada una de las siguientes rectas con los ejes y en  
    base a ellos, grafícalas:
25. f(x) = 4 + 5
26. f(x) = 7
27. 10 - x = 3y
28. X = 11 – 3y
29. y = -8x - 
30. 4x - 2y = 6
31. 
32. 5x + 3y = 2
33. f(t) = 3 - 5t
34. a = 5b
35. 4 = 8y - 6x
36. -1 = -3a – 8b
37. S = -13t + 5
38. x - 7y = 1
39. n = 6x - 0,5
40. m = n + 2
41. Expresa las siguientes ecuaciones de la forma y = mx + b, halla el valor de la pendiente y traza la gráfica correspondiente:
42. 6x - 8y = 1
43. 7y = 6 – x
44. 5x - 7y = 2
45. 0 = 15 - 9x - 4y
46. 5x - y = 2
47. 4x - y = 8
48. 2x - 7y = 10
49. 3y = -4x + 5
50. Halla la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos dados:
    1. (2, 5); (6, 10)
    2. (5, 6 ); (-6 , -5 )
    3. (6, 0); ( 7 , -6)
    4. (0, -6); (-10, 0)
    5. ; (7, 11)
    6. ; 
51. Calcula el valor de la pendiente que pasa por el origen (0, 0) y por el punto dado:
52. (5, 8)
53. (-1, 13)
54. (-5, -6)
55. (10, 10)
56. (3 , 9)
57. (9, -1)
58. 
59. 
60. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por cada uno de los siguientes pares de puntos:
61. (5, 3); (2, 8)
62. (4, -4); (-8, 8)
63. (0, -5); (4,)
64. (-9, 9) ; (3, -2)
65. ; (0, 0)
66. ( , 2) ; (-2, 6)
67. (-4, -2); (-1, 0)
68. (10, -6); (-2, -7)
69. (-1, -2); (-3, -4)
70. Para cada una de las ecuaciones del punto anterior, encuentra la ecuación de una recta paralela y de una recta perpendicular a ellas.
71. Transforma las ecuaciones de la forma Ax + By + C = O en y = mx + b o lo contrario según el caso:
72. 6x - 2y = -1
73. x - 8y = -5
74. 5x + 7y - 1 = 0
75. y = 8 - 3x
76. 5 + 9x - 3y = 2
77. 8x - 6y + 4 = 0
78. f(x) = 4x – 6
79. 
80. 
81. 
82. 
83. 
84. Halla la pendiente de las siguientes funciones, en base a su gráfica

Imagen 17: Ejercicio a.

* 1. 

**Descripción Imagen:** Plano cartesiano con grafica de la recta que pasa por los puntos (2, 0), (0, 1), (-2, 2), (-4, 3) y (-6, 4).

Imagen 18: Ejercicio b.

* 1. 

**Descripción Imagen:** Plano cartesiano con grafica de la recta que pasa por los puntos (0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6) y (4, 8).

1. Gráfica cada uno de los siguientes pares de rectas y determina si dichas rectas son paralelas o perpendiculares:
2. 4x + 5 y = 1; 4x + 5y = 0
3. y = 4x + 1; 5 - 4x + y = 0
4. y = 5; x = 4
5. 2x + 3y = -2; 3x - y = 4
6. y = 2x; f(x) = 5 – x
7. y = 5 +4x; y = 8 - 4x
8. ; 
9. ; 3y – 18 = 4x
10. Encuentra para cada caso la ecuación de una recta paralela y de una recta perpendicular. Gráfica en cada caso las tres funciones:
11. 2 + 6x - 5y = 0
12. X + 6y - 1 =0
13. 5x - 3y = 4
14. 10 + 2x = y
15. f(x) = 9 + x
16. 4 + y = x
17. f(x) = 5
18. 4 + x = y
19. 
20. 

Dos rectas en el mismo plano son paralelas si no se cortan.

### Prepárate Para El ICFES

Analiza la siguiente situación y luego interpreta y resuelve cada uno de los problemas pro­testos.

Supón que el sueldo de un vendedor en un almacén de calzado depende del número de pares de zapatos vendidos en el mes. Si, además de esto, tiene un ingreso básico de $ 100000, ¿Qué función representa el sueldo mensual del vendedor?

El siguiente es un ejemplo del manejo de utilidades de una empresa:

Una firma vende un producto a razón de S 6500 por unidad. Los costos variables por unidad son de

$ 2000 por materiales, y $2750 por mano de obra. Los costos fijos anuales son de $ 10000000. Construir la función de utilidad establecida en términos de x, el número de unidades producidas y rendidas. ¿Qué utilidad se obtiene si las vent­as anuales son de 20000 unidades?

Solución

Si el producto se vende a $ 6500 por unidad, el ingreso total se calcula con la función:

F(x) = 6500x.

El costo anual lo integran los costos por materia prima, mano de obra y costos fijos. Estos costos se pueden repre­sentar por medio de la función:

C(x) = 2000x + 2750x + 10000000

que se reduce a:

C(x) = 4750x + 10000000.

La utilidad se define como la diferencia entre el ingreso y los costos de una empresa:

U(x) =I(x) - C(x).

Entonces, la función de utilidad para nuestro ejemplo es:

U(x) = 6500x - (4750x + 10000000)

U(x) = 1750x – 10000000

Si la firma vende 20000 unidades durante el año, entonces:

U (20000) = 1750 x 20000 – 10000000 = 35000000 - 10000000 = $25000000

**Problemas propuestos**

1. Un grupo de ingenieros está interesado en formar una compañía para producir detectores de humo. Están en una etapa de diseño y estiman que los costos variables por unidad, incluyendo mate­ria prima, mano de obra y costos de mer­cadeo son de $ 22 500 000. Los costos fijos asociados con la formación, opera­ción y administración de la compañía y la adquisición de equipo y maquinaria, suman en total $ 2 500 000 000. Esti­man que el precio de venta será de $ 300 000 por detector.
2. Determina el número de detectores de humo que se deben vender a fin de que la firma esté en equilibrio con la inver­sión.
3. Los datos preliminares de mercado indican que la firma puede esperar unas ventas aproximadamente de 30 000 detectores de humo durante la vida del proyecto si se les fija a los detectores un precio de $ 300 000. Determina las utilidades esperadas en este nivel de producción.
4. Construye una función que determine la utilidad mensual del salario de tus padres, teniendo en cuenta ingresos adicionales y gastos como mercado, servicios, transporte, etc.
5. Una compañía produce tres productos, los cuales se venden, en $ 100, $ 150 y $ 85, respectivamente. Las necesidades de mano de obra para cada produc­to son de 2,5; 3,5 y 2 horas, respectivamente. Supón que los costos por mano de obra son de $ 30 por hora y que los costos anuales son de $ 500 000.
6. Construye una función conjunta de ingresos totales para las ventas de los tres productos.
7. Determina una función de costo anual para la producción de los tres productos.
8. Determina la función utilidad para los tres productos.
9. ¿Cuál es la utilidad anual, si se venden 20 000,10 000 y 30 000 unidades, respec­tivamente, de cada uno de los tres productos?

**CURIOSIDADES MATEMÁTICAS**

**PARADOJAS LÓGICAS**

Las paradojas lógicas tuvieron sus precursores en tiempos re­motos, los griegos formularon algunos de los acertijos lógicos que, en épocas recientes, han vuelto a ser propuestos por ma­temáticos y filósofos. Los sofistas crearon una verdadera espe­cialidad en el arte de proponer preguntas o problemas difíciles con los que quedaban perplejos y confundían a sus oponentes en los debates. Aristóteles los destruyó al establecer los funda­mentos de la lógica clásica, una ciencia que en casi todas sus partes es aún hoy perfectamente válida. Veamos una paradoja conocida:

Cazar en los territorios de un poderoso príncipe se castigaba, pero el príncipe decidió posteriormente que aquel que fuera sorprendido cometiendo este delito tendría el privilegio de ele­gir entre ser apresado o desterrado formulando una proposi­ción. Si la proposición era verdadera se le desterraba, si era falsa se le apresaba. Una persona que infringió la ley, se valió de una dudosa afirmación: "seré apresado".

Aquí se presentó un dilema, puesto que la persona agregó: "si ustedes me apresan, infringen las leyes hechas por el príncipe, puesto que mi posición es verdadera y debería por lo tanto ser desterrado: pero si ustedes me destierran, también violan las leyes porque entonces lo que yo dije era falso y debía, en con­secuencia, ser apresado".

# TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES

Antes de empezar

Los sistemas de ecuaciones lineales ya fueron resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área o volumen, sin que tuviera relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1.  anchura + longitud = 7 manos
2. longitud + anchura = 10 manos

En nuestra notación el sistema es:

* Anchura: x
* Longitud: y
* Manos: t

X + 4y = 28t

X + y = 10t

Restando la primera de la segunda se obtiene:

3y = 18t

Luego:

y = 6t

x = 4t

## SISTEMAS DE ECUACIONES

**Ecuación lineal con dos incógnitas**

Una ecuación de primer grado se denomina ecuación lineal.

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una igualdad algebraica del tipo: **ax + by = c**, donde **x** e **y** son las incógnitas, y **a**, **b** y **c** son números conocidos

Una solución de una ecuación lineal con dos incógnitas es un par de valores (xi, yi) que hacen cierta la igualdad.

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones y si las representamos forman una recta

3x + y = 12

* Coeficiente de x= 3
* Coeficiente de y= 1
* Término independiente =12

Una solución de la ecuación es:

x=1 y=9

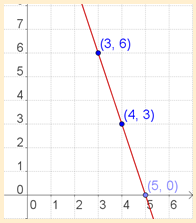
Observa que 3· (1)+9=12

Para obtener más soluciones se da a x el valor que queramos y se calcula la y

x = 0, y = 12 - 3·0 = 12

x = 1, y = 12 - 3·1 = 9

Imagen 19: Gráfica de la función Lineal



**Descripción Imagen:** Primer cuadrante del plano cartesiano en el cual se muestra la recta que une los puntos (3, 6), (4, 3) y (5, 0).

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común.



 son números reales

Dos sistemas con la misma solución se dicen equivalentes

Una **solución de un sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas es un par de valores (xi,yi) que verifican las dos ecuaciones a la vez. **Resolver el sistema** es encontrar una solución.

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

2x + 3y = 14

3x + 4y = 19

* X = 1
* Y = 4

Es una solución del sistema anterior

2(1) + 3(4) = 2 + 12 = 14

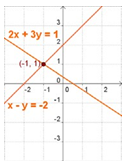
3(1) + 4(4) = 3 + 16 = 19

## CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación representa una recta en el plano. Discutir un sistema es estudiar la situación de estas rectas en el plano, que pueden ser:

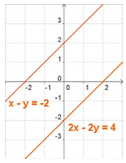
* Secantes, el sistema tiene solución única, se llama Compatible Determinado.
* Coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones, es Compatible Indeterminado
* Paralelas, el sistema no tiene solución, se llama Incompatible.

Imagen 20: Sistema Compatible Determinado



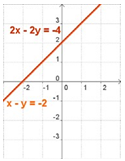
**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se encuentran graficadas las rectas 2x + 3y = 1, x – y = -2, éstas rectas son secantes y se cortan en el punto (-1, 1). Este gráfico muestra un sistema de ecuaciones compatible determinado.

Imagen 21: Sistema Incompatible



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se encuentran graficadas las rectas 2x - 2y = 4, x – y = -2, éstas rectas son paralelas. Este gráfico muestra un sistema de ecuaciones incompatible el cual está descrito por rectas paralelas (que no se cortan).

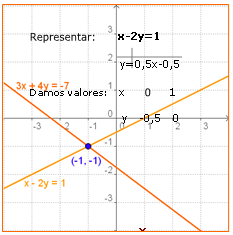
Imagen 22: Sistema Compatible Indeterminado.



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se encuentran graficadas las rectas 2x - 2y = -4, x – y = -2, éstas rectas son iguales. Este gráfico muestra un sistema de ecuaciones compatible indeterminado el cual está descrito por rectas iguales (se cortan en todos los puntos).

Recuerda cómo se representan las rectas en el plano.

Imagen 23: Rectas Secantes



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se encuentran graficadas las rectas x - 2y = 1, y = 0,5x – 0,5, éstas rectas son secantes. Este gráfico muestra un sistema de ecuaciones compatible determinado, el cual tiene como solución (-1, -1).

Observa cómo son los coeficientes de las dos ecuaciones en cada caso:

Si  las rectas son paralelas

y son coincidentes si 

## MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se distinguen tres métodos algebraicos de resolución de sistemas:

* Sustitución
* Igualación
* Reducción

Notas:

Es importante insistir en que la solución de un sistema es una pareja de valores. Es decir la solución son dos números reales, uno de ellos es el valor de una de las incógnitas (la 'x' en la mayoría de los ejercicios) y el otro el valor de la otra (normalmente la 'y'). Es un error muy frecuente el que alumnos como vosotros den por terminado el ejercicio al encontrar el valor de la primera incógnita.

Cada uno de los métodos que vamos a ver a continuación debe dar el mismo resultado aplicado al mismo sistema. Si no es así es que hay algún error.

Casos especiales

También puede ocurrir que el sistema en cuestión no tenga solución o que tenga infinitas. Esto lo debes haber visto al estudiar los sistemas desde un punto de vista geométrico. Desde esta perspectiva tenemos dos rectas del plano y tres posibilidades:

1. las rectas se cortan en un punto (sistema compatible determinado),
2. las rectas son coincidentes (sistema compatible indeterminado)
3. las rectas son paralelas (sistema incompatible).

El siguiente cuadro nos muestra una clasificación de los sistemas lineales.

Imagen 24: Mapa Conceptual

Mapa conceptual que describe los tipos de sistemas de ecuaciones y su relación con el número de soluciones.


**Descripción Imagen:** Mapa conceptual que inicia en “Sistemas Lineales” de este se deprenden “Compatibles” e “Incompatibles”, de compatibles se desprende “Tiene Solución” de incompatibles “No tiene Solución”, de tiene solución se desprende “Determinados: Solución Única e Indeterminados: Infinitas Soluciones”. Este mapa conceptual relaciona los tipos de sistemas de ecuaciones.

Para poder distinguir unos casos de otros, al resolver el sistema de forma algebraica, debemos seguir los pasos indicados según el método. Al llegar al final podemos encontrarnos una de las cuatro situaciones siguientes:

* a x = b, con 'a' y 'b' dos números reales cualesquiera. En este caso no hay problema al despejar x y el sistema tiene una única solución. Es, por tanto, compatible determinado.
* a x = 0, con 'a', un número real cualquiera. En este caso al despejar x nos quedaría x= 0 =0. Por tanto el sistema tiene también una única solución.
* 0 x = b, (ó 0 = b), con 'b' un número real cualquiera b≠0. En este caso no es posible despejar 'x' pues la operación de dividir entre cero es imposible (también puede interpretarse que 0 no puede ser igual a no cero).

Luego el sistema no tiene solución. Es incompatible.

0 x = 0, (ó 0 = 0). En este caso cualquier valor de x satisface la igualdad y, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones que son los infinitos puntos de las rectas coincidentes. Así el sistema es compatible indeterminado.

Este es el caso más complicado de resolver. Se suele resolver haciendo x = t, t ∈ ℝ y despejando y en función de 'x'.

Veremos algún ejemplo más adelante.

### Método de Sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra. A continuación explicamos claramente los pasos:

**Método De Sustitución**

1. Se despeja **una** de las incógnitas en **una** de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación. Obtenemos así una ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve esta ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la ecuación del paso 1º.
5. Se comprueba la solución en el sistema inicial para asegurarnos de que el resultado es correcto

**Ejemplos:**

1. Este es un ejemplo muy básico.

x + y = 1

x – y = 5

1. X = 1 – y Despejamos x en la primera
2. (1−y)−y = 5 Sustituimos en la segunda
3. Ahora resolvemos la ecuación en y :

1 – y – y = 5

1 − 2y = 5

1 – 5 = 2y

−4 = 2y

 = y

−2 = y

1. Sustituimos en 1 para hallar x:

X = 1 – (−2)

X = 1 + 2

X = 3

1. Ahora comprobamos :

3 + (−2) = 3 – 2 = 1 Se cumple la primera.

3 – (−2) = 3 + 2 = 5. Se cumple la segunda.

1. Aquí puede verse que siempre hay que buscar cuál es la incógnita más fácil de despejar.

2x + y = −7

4x − 2y = −10

1. Y = −7 − 2x Despejamos y en la primera
2. 4x – 2(−7 − 2x)=−10 Sustituimos en la segunda
3. Ahora despejamos x :

4x + 14 + 4x = −10

8x = −10 −14

8x = −24



x=−3

1. Sustituimos en 1 para hallar y

Y = −7 – 2(−3)=−7 + 6 = −1

1. Ahora comprobamos :

2(−3) + (-1) = −6 – 1 = −7 Se cumple la primera.

4(−3) −2 (−1) = −12 + 2 = −10. Se cumple la segunda.

1. Si es igual de difícil despejar una incógnita u otra, la elección es libre. Además nada impide que las soluciones no sean números enteros.

4x − 3y = 3

2x + 6y = −1

1.  Despejamos x en la primera
2.  Sustituimos en la segunda
3. Ahora despejamos y :

2(−1−6y) − 3y = 3

−2 − 12y − 3y = 3

−2 − 15y = 3

−2 – 3 = 15y

−5 = 15y





1. Sustituimos en 1 para hallar x :





1. Ahora comprobamos :

 Se cumple la primera.

 Se cumple la segunda.

### Método de Igualación

En este método se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones. Estos son los pasos:

**Método De Igualación**

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones. Resultando así, una ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve esta ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones del paso 1º.
5. Se comprueba la solución en el sistema inicial para asegurarnos de que el resultado es correcto.

**Ejemplos:**

1. Empecemos con un ejemplo muy sencillo.

x + 2y = 8

x + y = 3

1. X = 8 − 2y despejamos x en la primera

X = 3 – y despejamos x en la segunda

1. 8−2y = 3 – y Igualamos las dos expresiones
2. Resolviendo :

8−3 = −y - 2y

5 = y

1. Sustituimos para hallar x:

X = 8−2\*5 = 8 − 10= −2

1. Ahora comprobamos :

−2 + 2\*5 =−2 + 10 = 8 Se cumple la primera

−2 + 5 = 3 Se cumple la segunda

1. En este ejemplo despejar 'x' es un poco más complicado y necesita de fracciones. Las soluciones, sin embargo, son enteras.

2x + 3y = 6

−3x − 2y = 1

1. 2x = 6 − 3y

 despejamos x en la primera

-2y – 1 = 3x

 despejamos x en la segunda

1.  Igualamos las dos expresiones
2. Resolviendo :

3(6 − 3y) = 2(−2y – 1)

18 − 9y = −4y – 2

18 + 2 = −4y + 9y

20 = 5y

Y = 

y=4

1. Sustituimos para hallar x:







X=-3

1. Ahora comprobamos :

2 · (−3) + 3 · 4 = −6 + 12 = 6 Se cumple la primera

−3 (−3) − 2 · 4 = 9 – 8 = 1 Se cumple la segunda

1. En este último ejemplo, las soluciones son fracciones:

5x + 2y = 0

10x − 2y = 3

1. 2y = −5x

Y =  despejamos y en la primera

10x – 3 = 2y

 Despejamos y en la segunda

 Igualamos las dos expresiones

1. Resolviendo :

2(-5x) = 2(10x – 3)

-10x = 20x -6

-10x -20x = -6

-30x = -6





1. Sustituimos para hallar y:





1. Ahora comprobamos :

 Se cumple la primera

 Se cumple la segunda

### Método de Reducción

En este método se preparan las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas pero con distinto signo. Al sumar las ecuaciones nos queda una ecuación con una sola incógnita.

**Método De Reducción**

1. Se preparan convenientemente las dos ecuaciones (multiplicándolas por los números que convenga).
2. Se suman las dos ecuaciones desapareciendo así una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación que resulta.
4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
5. Se comprueba la solución en el sistema inicial para asegurarnos de que el resultado es correcto.

**Ejemplos:**

Veamos varios ejemplos:

1. Como siempre, el primer ejemplo es muy fácil. En este caso no hay que preparar las ecuaciones.
2. X + 2y = 0
3. X – 2y = 8

En este caso las ecuaciones ya están preparadas.

Por tanto, al sumar directamente desaparece la y.

1. Sumamos las ecuaciones:

X + 2y + x – 2y = 8

2x + 0y = 8

2x = 8

Llegamos así a:

1. 2x = 8

X = 

X = 4

1. Sustituimos ahora en la primera ecuación.

4 + 2y = 0

2y = -4

Y = 

Y = -2

1. Comprobamos ahora la solución:

X = 4

Y = -2

4 + 2(-2) = 4 – 4 = 0 Se cumple la primera ecuación.

4 – 2(-2) = 4 + 4 = 8 Se cumple la segunda ecuación.

1. Aquí, la cosa se complica un poco. Ya es necesario preparar la primera ecuación.
2. X + 3y = -4
3. 3x – 4y = 27
4. Dado que en la segunda ecuación el coeficiente de x es 3, se multiplica por -3 la primera ecuación:

-3(x + 3y = -4)

-3x -9y = 12

1. Ahora se suma la ecuación anterior con la ecuación ii.

-3x -9y + 3x -4y = 12 + 27

0x - 13y = 39

-13y = 39

1. Se despeja y:

Y = 

Y= -3

1. Sustituimos ahora en la primera ecuación:

X + 3(-3) = -4

X – 9 = -4

X = -4 + 9

X = 5

1. Comprobamos ahora la solución x = 5, y = -3

5 + 3(-3) = 5 – 9 = -4 Se cumple la primera ecuación.

3(5) – 4(-3) = 15 + 12 = 27 Se cumple la segunda ecuación.

1. En este tercer ejemplo, hay que preparar las dos ecuaciones. Es el caso más complicado.
2. 3x + 4y = 5
3. -2x – 5y = -8
4. El mínimo común múltiplo entre 3 y -2 que son los coeficientes de x en cada una de las ecuaciones es 6, por tanto se de multiplicar cada una de estas para obtener este valor.

Multiplicamos la ecuación i. por 2

2(3x + 4y = 5)

6x + 8y = 10

Multiplicamos la ecuación ii. por 3

3(-2x – 5y = -8)

-6x -15y = -24

1. Sumamos las dos ecuaciones obtenidas:

6x + 8y -6x – 15y = 10 – 24

0x -7y = -14

-7y = -14

1. Despejamos y:



Y = 2

1. Sustituimos ahora en la primera ecuación.

3x + 4y = 5

3x + 4(2) = 5

3x + 8 = 5

3x = 5 – 8

3x = -3

X =

X = -1

1. Comprobamos ahora la solución x = -1, y = 2

3(-1) + 4(2) = -3 + 8 = 5 Se cumple la primera ecuación.

-2(-1) – 5(2) = 2 – 10 = -8 Se cumple la segunda ecuación.

### Ejemplos de casos especiales

1. En este ejemplo, vemos un caso en el que el sistema es Incompatible. El sistema se ha resuelto por Igualación.
2. 5x + 2y = 0
3. 10x + 4y = 4

IGUALACIÓN

2y = −5x

Y =  Despejamos y en la primera

4y = 4 − 10x

 Despejamos y en la segunda

Igualamos:

 = 

Despejamos el valor de x:

4(-5x) = 2(4 – 10x)

-20x = 8 – 20x

-20x + 20x = 8

0 = 8

X = Imposible

Por tanto: y = Imposible

EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN. ES INCOMPATIBLE

Lo importante aquí es que entiendas los que ocurre cuando se llega a una expresión del tipo 0x = b. Da igual el método que se utilice. También es importante analizar el sistema original. Si lo observas detenidamente te darás cuenta de que ya desde el comienzo se plantea una situación imposible pues si 5x + 2y = 0, entonces 10x + 4y = 2 · (5x + 2y)= 2 · 0 = 0. Es decir no es posible que si 5x + 2y = 0, 10x + 4y = 4.

En líneas generales si una de las ecuaciones resulta de multiplicar los coeficientes de las incógnitas por un número y el término independiente no se multiplica, el sistema resultante será Incompatible.

1. Este segundo ejemplo es de un sistema Compatible Indeterminado. Es el caso que más trabajo nos cuesta resolver.
2. 2x - y = −2
3. 4x - 2y = −4
4. Despejamos y de la primera :

Y = −2 − 2x

1. Sustituimos en la segunda:

4x – 2(−2 − 2x) =−4

1. Resolvemos :

4x + 4 + 4x = −4

4x − 4x = − 4 – 4

0x = 0

X = t, con t ∈ ℝ

1. Sustituimos en 1 para hallar y:

Y = −2 − 2x

X = t

Y = −2 − 2t, t ∈ ℝ

Sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones:

X = t

Y = −2 − 2t con t ∈ ℝ

Las soluciones se hallarían dando valores a t.

Por ejemplo:

Si t = 1, x=1

Y = −2 − 2 · 1

Y = -4

Si t=−2

X = −2

y=−2−2 · (−2)

y = -2 + 4

y = 2

Y así para los infinitos valores de t

Este ejemplo se ha resuelto por sustitución pero hubiera dado igual resolverlo por cualquier otro método. Lo importante es que al llegar a 0x=0 ó 0y=0, nos encontramos con un sistema compatible indeterminado y a partir de ese momento el ejercicio se terminaría igual en cualquiera de los tres casos. Si observas detenidamente el sistema original, te darás cuenta de que la segunda ecuación resulta de multiplicar la primera por 2. Según esto la información de la primera y la segunda ecuación es la misma. Por eso toda solución de la primera ecuación lo es de la segunda y viceversa.

En líneas generales si una de las ecuaciones resulta de multiplicar todos los coeficientes (de las incógnitas y del término independiente) por un número, el sistema resultante será Compatible Indeterminado.

### Método Gráfico

El método gráfico para la solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se realiza trazando las dos rectas en un mismo plano, con esto se determina la intersección (punto donde se cruzan las rectas) que es la solución del sistema de ecuaciones.

Como bien dice el principio de Euclides: “Por dos puntos pasa una y sólo una recta”, se puede trazar una recta determinando dos puntos que pertenezcan a la misma trazando su unión y continuación.

Pasos a seguir para graficar una recta.

1. De la ecuación original despejar “y”.
2. Dar a “x” dos valores distintos y sustituirlos en la ecuación anterior.
3. El valor asignado a “x” y el obtenido en “y” en la sustitución de x formarán las coordenadas de los dos puntos de cada recta.
4. La coordenada del punto donde se cruzan las rectas es la solución al sistema de ecuaciones.

**Ejemplos**

1. Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico.
2. X + 2y = 8
3. 2x + y = 7

Solución.

Despejamos “y” en ambas ecuaciones.

* Ecuación 1:



Si x = 2, Y = 3 Coordenada (2,3)

Si x = 4, y = 2 Coordenada (4,2)

* Ecuación 2:

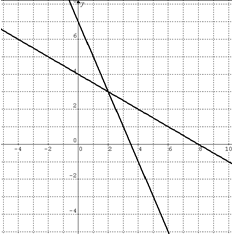
Y = 7 -2x

Si x= 3, y = 1 Coordenada (3,1)

Si x = 5, y = -3 Coordenada (5, –3)

Localizando los puntos en un plano cartesiano.

Imagen 25: Rectas Secantes



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se encuentran graficadas las rectas X + 2y = 8, 2x + y = 7 las cuales son secantes. Dado que las rectas son secantes, esto muestra que el sistema tiene solución y es el punto donde se cortan que es (2, 3).

Este par de rectas tiene intersección en (2,3) y está es la solución del sistema

Conclusión. Las rectas se intersectan en un solo punto; es decir, esta es la única solución x=2 y=3

1. Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico.
2. 2x – y = –7
3. 4x – 2y = 5

Solución.

Despejamos “y” en ambas ecuaciones.

* Ecuación 1

y = 7 + 2x

Si x= –2, y = 3

Coordenada (–2,3)

Si x=0, y = 7

Coordenada (0,7)

* Ecuación 2



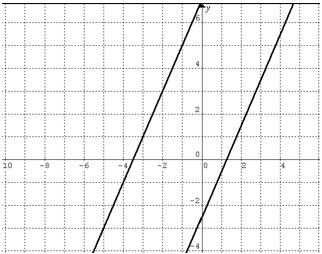
Si x = 0, y = –2,5

Coordenada (0, –2,5)

Si x = 3, y = 3,5

Coordenada (3, 3.5)

Imagen 26: Rectas Paralelas



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se encuentran graficadas las rectas 2x – y = –7, 4x – 2y = 5 las cuales son paralelas. Dado que las rectas son paralelas, esto muestra que el sistema no tiene solución.

Conclusión: Este par de rectas son paralelas, por tanto ningún punto satisfice las ecuaciones. El sistema no tiene solución.

### APLICACIONES PRÁCTICAS

**Resolución de problemas**

Para resolver un problema mediante un sistema, hay que traducir al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resolver el sistema planteado.

Comienza por leer detenidamente el enunciado hasta asegurarte de que comprendes bien lo que se ha de calcular y los datos que te dan.

Una vez resuelta el sistema no te olvides de dar la solución al problema.

**Recuerda los pasos:**

* Comprender el enunciado
* Identificar las incógnitas
* Traducir a lenguaje algebraico
* Plantear las ecuaciones
* Resolver el sistema
* Comprobar la solución

1. María y su hija Sara tienen en la actualidad 56 años entre las dos. Si dentro de 18 años Sara tendrá 5 años más que la mitad de la edad de su madre, ¿qué edad tiene actualmente cada una?

**Solución:**

Llamamos:

* x a la edad de María.
* y a la edad de Sara

La suma de las edades es 56:

X + y = 56

Dentro de 18 años tendrán x + 18, y + 18

Y entonces la edad de Sara será:

Y + 18 = 5 + 

El sistema es:

1. x + y = 56
2. Y + 18 = 5 + 

Que queda escrito como:

1. X + y = 56
2. –x + 2y = -8

Por Reducción:

3y = 48

y=16

x= 56 – 16 = 40

**Solución:**

María tiene 40 años

Sara tiene 16 años

Comprobación: 40+16=56

1. Una parcela rectangular tiene un perímetro de 240 m, si mide el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?

**Solución:**

Llamamos:

* x al ancho de la parcela
* y al largo de la parcela

El largo es el triple del ancho: y = 3x

El perímetro es: 2x + 2y = 240

El sistema es:

1. y = 3x
2. x + y = 120

Por sustitución:

x + 3x = 120

4x = 120

X = 30m

Y = 90

Dentro de 18 años tendrán 58 y 34,

34= 5 + 58/2

**Solución:**

* Ancho = 30m
* Largo = 90m

Comprobación:

90 =3·30

2·90+2·30=240

1. Jorge tiene en su cartera billetes de 10€ y 20€, en total tiene 20 billetes y 440€ ¿Cuántos billetes tiene de cada tipo?

* x : Billetes de 50 €
* y : Billetes de 10 €

Sistema:

1. x + y = 20
2. 50x + 10y = 440

Despejando y en i.:

y = 20 – x

Despejando y en ii.

5x + y = 44

y = 44 - 5x

Igualando:

20 - x = 44 - 5x

Se resuelve para x:

5x- x = 44 -20

4x = 24

X = 6

S reemplaza en i. para obtener y:

6 + y = 20

Y = 20 - 6

Y = 14

Tiene 6 billetes de 50 € y 14 billetes de 10 €

1. En un examen de 100 preguntas Ana ha dejado sin contestar 9 y ha obtenido 574 puntos. Si por cada respuesta correcta se suman 10 puntos y por cada respuesta incorrecta se restan 2 puntos, ¿cuántas ha contestado bien y cuántas mal?

* x: número de respuestas correctas
* y: número de respuestas incorrectas
* En total responde 100 – 9 = 91 preguntas.

Sistema:

1. x + y = 91
2. 10x - 2y = 574

Se multiplica por 2 la primera ecuación:

2x + 2y = 182

Se suma la ecuación anterior con ii.

10x - 2y + 2x + 2y = 574

12x = 756

Despeja x:

X = 63 preguntas bien

Y = 91 – 63 = 28 mal

### Práctica lo aprendido

Cuando se plantea un sistema, no siempre está en la forma:

Ax + by = c

Dx + ey = f

Pero esto no debe asustarte. Si has entendido bien los métodos, lo importante es que veas en cada método los pasos que es necesario dar para llegar al final.

1. Resuelve por sustitución:
2. X − 2y = 5

3x − 2y = 19

1. Y = 3



1. 3x − 2y = 19

2x – y = 5

1. 3x + 2y = 6

X = −20 + 3y

1. 5x − 4y = 0

10x + 2y = 5

1. 2x – 16 = 2y

2y − 3x = 16

1. Resuelve por igualación:
2. 2x + y = 2

3x + y = 5

1. 

2x − 4y = 2

1. y = -5x + 1



1. x − 2y = 13

X - 5y = −8

1. 5x + y = 3

2x - y = -3

1. 6x − 4y = 3

3x + 8y = 4

1. Resuelve por reducción:
2. 5x + 2y = 4

3x − 2y = 12

1. X − 2y = 13

3x − 3y = 24

1. −2x + y = −15

3x − 2y = 26

1. 7x + y = −4

7x + 2y = −10

1. −3x − 2y = −1

2x + 3y = 1

1. 3x − 2y = 19

X − 2y = 5

1. En los siguientes sistemas se pide que razones antes de resolverlos para decidir si el sistema será compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Resuelve sólo los casos en que el sistema sea compatible indeterminado:
2. X + y = −4

X + y = −10

1. X+ 2y = −10

3x + y = −4

1. 3x + 3y = −12

X + y =−4

1. 5x + 2y = 4

−3x + y = 2

1. 14x + 2y = 5

7x + y = −4

1. −6x + 4y = −12

3x − 2y = 6

1. Hallar dos números sabiendo que el mayor más seis veces el menor es igual a 62 y el menor más cinco veces el mayor es igual a 78.
2. Dos números suman 241 y su diferencia es 99. ¿Qué números son?
3. Pedro tiene 335 € en billetes de 5€ y de 10€; si en total tiene 52 billetes, ¿cuántos tiene de cada clase?
4. En un hotel hay 67 habitaciones entre dobles y sencillas. Si el número total de camas es 92, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?
5. María ha comprado un pantalón y un jersey. Los precios de estas prendas suman 77€, pero le han hecho un descuento del 10% en el pantalón y un 20% en el jersey, pagando en total 63’6€.¿Cuál es el precio sin rebajar de cada prenda
6. Halla dos números tales que si se dividen el primero por 3 y el segundo por 4, la suma de los cocientes es 15, mientras si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma de los productos es 188.
7. En un parque de atracciones subir a la noria cuesta 1 € y subir a la montaña rusa 4 €. Ana sube un total de 13 veces y gasta 16 €, ¿cuántas veces subió a cada atracción?
8. En un corral hay ovejas y gallinas en número de 77 y si contamos las patas obtenemos 274 en total. ¿Cuántas ovejas y cuántas gallinas hay?
9. Encuentra un número de dos cifras sabiendo que la suma de éstas es 7 y la diferencia entre el número y el que resulta al intercambiarlas es 27.
10. La suma de las edades de Luisa y de Miguel es 32 años. Dentro de 8 años la edad de Miguel será dos veces la edad de Luisa. ¿Qué edades tienen ambos?
11. Rosa quiere comprar globos y serpentinas para adornar la fiesta de fin de curso. Quiere comprar doble número de paquetes de globos que de serpentinas y no quiere comprar menos de 30 paquetes de globos. Si el paquete de serpentinas vale 4€ y el de globos 3€, y además no quiere gastar más de 248€. ¿Cuántos paquetes de serpentinas puede comprar?
12. La piscina del edificio A es un cuadrado y la del edificio B un rectángulo, uno de cuyos lados mide lo mismo que el del cuadrado y otro 6 m. Para qué medidas del lado del cuadrado el perímetro de la piscina del edificio A es mayor que el de la piscina del edificio B.
13. Pedro tiene 87 € para comprar todos los discos de su cantante preferido. Si cada disco costase 23 € no tendría suficiente dinero, pero si costase 15 € entonces le sobraría. ¿Cuántos discos tiene el cantante?
14. Un joyero ha vendido 18 pulseras de plata y 13 de oro por $3500. Una pulsera de oro cuesta cuatro veces lo que cuesta una de plata. ¿Cuál es el precio de una pulsera de cada clase?
15. Esteban pagó una cuenta de $300 con billetes de $2 y de $5. En total empleó 90 billetes para hacer el pago. ¿Cuántos billetes de cada valor utilizó?
16. Entre dos estantes de una librería hay 90 libros. Si se pasan 10 libros del segundo al primer estante, ambos quedan con la misma cantidad de libros. ¿Cuántos libros había inicialmente en cada estante?
17. Un número de dos cifras es tal que la cifra que ocupa el lugar de las decenas es el duplo de la que ocupa el lugar de las unidades, y la diferencia de las dos cifras, aumentada en 12, es igual a 15. Calcula ese número.
18. Laura es 17 años mayor que Pablo y la suma de sus edades es 75 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
19. En un grupo de 560 personas asistentes a un espectáculo la razón entre hombres y mujeres es 2/5. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres concurrieron?
20. La edad de María más el duplo de la edad de Pedro es 14. El duplo de la edad de María dentro de 4 años será la de Pedro dentro de 6 años. Calcular la edad de ambos.
21. Un comerciante compra dos objetos por $2100 y los vende por $2202. Si en la venta de uno de los objetos gana el 10% y en el otro pierde el 8%, ¿cuánto pagó por cada uno de los objetos?
22. En un triángulo isósceles la suma de la base y de la altura es igual a 40cm. Si se agregan 12cm a la base, se obtiene 9/4 de la altura. Calcular el área.
23. Si se aumenta en 2m tanto el ancho como el largo de un rectángulo, el perímetro mide 30m Si el largo se disminuye en 2m resulta un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
24. El perímetro de un rectángulo mide 17cm y su base mide 0,1dm más que el doble de la altura. Averiguar las medidas en m del rectángulo**.**
25. El propietario de un campo ha decidido sembrar en él dos tipos de cultivo: A y B. La semilla del cultivo A cuesta $4 por hectárea, y la del cultivo B, $6 por hectárea. El costo de mano de obra es de $20 por hectárea para el cultivo A y de $10 por hectárea para el cultivo B. Si el propietario dispone gastar $480 en semillas y $1400 en mano de obra, ¿cuántas hectáreas de cada cultivo podrá sembrar?
26. Un elaborador de vinos artesanales se dispone a preparar un corte (mezcla) entre dos variedades: chardonay y pinot gris. Para responder a un pedido de compra, el volumen total de la mezcla a obtener debe ser de 1420 litros. Si el volumen de chardonay que interviene en la mezcla es igual a dos tercios del volumen de pinot gris más 120 litros, ¿cuántos litros de cada variedad deben mezclarse para obtener el corte deseado?

# TEMA 3: DETERMINANTES

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:
2. 3x - (4y + 6) = 2y - (x + 18)

2x - 3 = x – y + 4

1. 3(2x + y) - 2(y - x) = -4(y + 7)

3(2y + 3x) - 20 = -53

1. Resuelve por método de suma y resta:
2. 



1. 



**Definición:**

Sean a b, c y d números reales cualesquiera. Una matriz cuadrada de orden 2 x 2 es una estructura que se representa:

A = 

El determinante de la matriz A se define como:



**Ejemplo:**

Hallar el determinante de la matriz:



**Solución:**

= 5 x (-2) – (-8) x 7 = -10 + 56 = 46

Una de las aplicaciones de las determinan­tes es la solución de sistemas de ecuaciones. El procedimiento utilizado se conoce con el nombre de Regla de Cramer.

## REGLA DE CRAMER

Consideremos el sistema

ax + by = c

dx + ey = f

Siendo a, b, c, d, e y f números reales. El desarrollo de este sistema por medio de la regla de Cramer es el siguiente:

1. **Paso 1:** Hallar el determinante del sistema, esto es, la solución de la matriz formada por los coeficientes de las variables en las dos ecuaciones:



1. **Paso 2:** Para hallar x se calcula el cociente:



La matriz formada por los términos independien­tes de las dos ecuaciones y los coeficientes de y. Esto quiere decir que para hallar x debemos remplazar, en la matriz del numerador, los coefi­cientes de x por los términos independientes de las ecuaciones.

1. **Paso 3:** Hallar y. Para encontrar y se remplaza en la matriz del numerador los coeficientes de y por los términos independientes de las ecuaciones. Por lo tanto:



**Ejemplos:**

1. Desarrollar el sistema:
2. 2x - 5y = 23
3. 3x + y = 9

**Solución**

El determinante del sistema es:

= 2x1 – 3 x (-5) = 2 + 15 = 17

El valor de x se determina por medio de la operación:



X = 4

Para el valor de y, la operación es similar:



y = -3

1. Un número es cuatro menos que otro. La suma de los dos números es cuatro veces su diferen­cia. Hallar los dos números.

**Solución**

Si llamamos x y y a los números, las ecuaciones de este problema son:

1. x = y - 4 que equivale a: x - y = -4
2. x + y = 4(x - y) que equivale a 3x - 5y = 0

El determinante del sistema es:



Ahora vamos a hallar el valor de x:



Por último hallamos y.



### Practica lo aprendido

1. Halla los siguientes determinantes:
2. 
3. 
4. 
5. 
6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:
7. x + y = 3

3x - 2y = -1

1. 3y - x = 1

15x - 5y = -15

1. 3x - y = 1

X - y = 

1. 3x + 11y = -21

5x - 3y = 29

1. 



1. 



1. Resuelve los siguientes problemas por cualquiera de los métodos:
2. Halla dos números cuya suma sea 1 82 y su diferencia 60.
3. En un cine hay 150 personas entre adultos y niños. Cada niño pagó $ 3000 y cada adulto $ 5000 por su entrada. Si se recaudaron $ 570000, ¿cuántos adultos y cuántos niños hay  
   en el cine?
4. La suma de las cifras de un número de dos cifras es 1 5 y si al número se le resta 9, las cifras se invierten. Halla el número.
5. La razón entre dos números es de 3 a 4. Si al menor se le suma 2 y al mayor se le resta nueve, quedan en la razón de 4 a 3. Halla los números.
6. Un número consta de dos cifras cuya suma es 9, Cuando se invierten sus cifras se obtiene un número que multiplicado por 6 es 5 veces el número primitivo. Halla el número.
7. Con cada par de números, construye un problema y resuélvelo por cualquiera de los méto­dos que aprendiste:
8. 5 y 11
9. -4 y -3
10. 4 y 8
11. 10 y -4
12. -4 y -7

### Prepárate para el ICFES

1. Una fábrica de artículos deportivos produce y dis­tribuye mensualmente los siguientes productos a dos almacenes A y B:

Tabla 3: Relación Artículo - Cantidad

| Artículo | Cantidad |
| --- | --- |
| Raqueta | 15 |
| Balones | 40 |
| Palos de golf | 35 |
| Bolas de tenis | 42 |

El almacén A vende raquetas a $ 20 000 y palos de golf a $ 32000.

El almacén B vende balones a $ 12 500 y bolas de tenis a $ 7500.

En base a la información anterior contesta las preguntas:

1. Si durante el primer mes el almacén A ven­dió 27 artículos y recaudó un total de $ 744 000, ¿cuántas raquetas y cuántos palos de golf vendió?
2. Si el almacén B recaudó $ 670 000 en 66 artículos, ¿cuántos balones y bolas de te­nis vendió?
3. En el segundo mes cada almacén vendió lo que quedó en el primer mes además de otro pedido recaudando $ 1 300 000 y $ 445 000 respectivamente. ¿Cuántos artículos vendió cada almacén en el segundo mes?
4. Dos máquinas de imprenta trabajando jun­tas pueden imprimir un libro en 20 horas. A las 15 horas una de ellas se rompe y enton­ces a la otra le toma 9 horas más terminar el trabajo. ¿Cuántas horas necesitará cada máquina para imprimir ella sola el libro?
5. Dos nadadores A y B se entrenan para una competencia de relevo en una piscina que tie­ne 30 metros de largo. El deportista A realiza 2 recorridos y B 2 recorridos y lo hacen en un tiempo de 76 segundos. Si A realiza un reco­rrido y B realiza 3, entonces lo hacen en 74 segundos. Halla la velocidad de cada uno.
6. En una batalla del norte de África había 4 tan­ques italianos por cada 3 tanques ingleses. Durante la batalla los italianos perdieron 20 tanques y los ingleses 10 tanques y quedaron entonces 5 tanques italianos por cada 4 tanques ingleses. ¿Cuántos tanques italianos e ingleses había al comienzo de la batalla?
7. Navegando a toda velocidad río arriba un bote de motor hace 18 millas en una hora. Nave­gando a media velocidad río abajo hace 15 millas en una hora. Halla la velocidad máxima del bote y la velocidad de la corriente.
8. Un granjero desea cercar un lote rectangular de terreno. Si usa un material que cuesta $ 2 400 por vara para el frente del lote y un ma­terial que cuesta $ 2 100 por vara para los otros tres lados, la cerca cuesta $ 58 950. Si usa el material más caro para los cuatro la­dos, la cerca le cuesta $ 64 800. Halla las dimensiones del lote.

### Curiosidades Matemáticas

El número 24 tiene la propiedad de ser "casi" un cuadrado perfecto:

24 + 1 = 25 =  y de que su doble también es casi cuadrado perfecto:

(24 x 2) + 1 = 49 =  ¿Cuál es el siguiente número con esta propiedad?

# TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES 3 X 3

1. Resuelve el siguiente problema por cualquiera de los métodos estudiados.

Al cambiar un cheque de $ 4000000, Fanny solicita al banco que le den billetes de $ 10000 y $ 20000. Si recibió un total de 190 bille­tes, ¿cuántos de $ 10000 y cuántos de $ 20000 le dio el banco?

1. Con cada una de las siguientes parejas de números construye un problema en gramos que se resuelva a partir de un sistema 2 x 2.
2. 5 y -3
3. 4 y 2
4. -3 y 1
5. 12 y 20

**SISTEMAS DE ECUACIONES 3X3**

Consideremos el siguiente problema:

Una dieta especial consiste en cápsulas A, B y C. La siguiente es la composición de las cápsulas:

Tabla 4: Componentes por Cápsula

| Cápsula | Grasa | Carbohidratos | Proteínas |
| --- | --- | --- | --- |
| A | 2 | 1 | 3 |
| B | 1 | 2 | 3 |
| C | 3 | 2 | 1 |

¿Cuántas cápsulas deben usarse si la dieta debe proporcionar exacta­mente 13 gramos de grasa, 12 de carbohidratos y 11 de proteínas?

En este problema podemos identificar 3 variables (la cantidad de cápsulas A, B y C).

Como debemos conseguir una cantidad determinada de proteínas, grasa y carbohidratos, es necesa­rio plantear 3 combinaciones distintas para A, B y C de tal forma que se satisfagan dichas cantidades.

Las combinaciones son las siguientes:

1. 2A + B + 3C = 13
2. A + 2B + 2C = 12
3. 3A + 3B + C = 11

Vemos que en este problema se formaron 3 ecuaciones, cada una con tres incógnitas. Esta es­tructura recibe el nombre de sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas o sistema 3X3.

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es de la forma:



Siendo x, y, z las incógnitas y con números reales.

La resolución de un sistema 3 x 3 es posible ya sea por el método de igualación, de sustitución, de suma y resta o por medio de la regla de Cramer. Para cada uno de estos métodos vamos a ver un ejemplo.

## MÉTODO DE IGUALACIÓN

Consideremos el problema planteado anteriormente. Las ecuaciones correspondientes son:

1. 2A + B + 3C = 13
2. A + 2B + 2C = 12
3. 3A + 3B + C = 11
4. **Paso 1.** Tomamos dos ecuaciones, despejamos una de las incógnitas e igualamos los resultados:

* 2A + B + 3C = 13



* A + 2B + 2C = 12

A = 12 – 2B – 2C

Igualamos:

 = 12 – 2B – 2C

13 – B - 3C = 24 - 4B - 4C

3B + C = 11 (iv)

1. **Paso 2:** Realizamos el mismo proceso con otras dos ecuaciones:

* A + 2B + 2C =12

A = 12 – 2B – 2C

* 3A + 3B + C = 11



Igualamos:

12 – 2B – 2C = 

36 – 6B – 6C = 11 – 3B – C

3B + 5C = 25 (v)

1. **Paso 3:** Con las ecuaciones (iv) y (v) formamos un sistema 2 X 2, en el cual vamos a seguir el proceso de igualación.

De (iv) y (v) se igualan los valores de B:

1. 3B + C = 11



1. 3B + 5C = 25



Igualamos:



11 – C = 25 – 5C

4C = 14

C = 

1. **Paso 4:** Tomamos el valor de C y lo remplazamos en (iv) o en (v) para hallar B:









1. **Paso 5:** Remplazamos B y C en una de las tres primeras ecuaciones para hallar A.

2A + B + 3C = 13



2A = 0

A = 0

## MÉTODO DE SUMA Y RESTA

Para explicar este método vamos a resolver el siguiente sistema:

1. 2x + 3y + z = 8
2. 5x + 2y - 3z = -13
3. x - 2y + 5z = 15
4. **Paso 1:** Tomamos las ecuaciones (1) y (2) y eliminamos una de las incógnitas.

2x + 3y + z = 8 Multiplicamos por 3.

5x + 2y - 3z = -13

Se obtiene:

6x + 9y + 3z = 24 (1)

5x + 2y – 3z = -13 (2)

Se suman:

11x + 11y = 11 (4)

1. **Paso 2:** Tomamos otras dos ecuaciones y eliminamos también z:

5x + 2y - 3z = -13 Multiplicamos por 5

x - 2y + 5z = 15 Multiplicamos por 3

Se obtiene:

25x + 10y - 15z = -65 (2)

3x - 6y + 15z = 45 (3)

Se suman:

28x + 4y = -20 (5)

1. **Paso 3:** Tomamos las ecuaciones (4) y (5) para realizar el mismo proceso:

11x+ 11y = 11 (4) Para facilitar el proceso puede dividirse esta ecuación por 11:

(5) 28x + 4y = - 20

(4) x + y = 1 Multiplicamos por (-4)

(4) -4x - 4y = -4

(5) 28x + 4y = -20

Sumamos (4) y (5)

24x = -24

X = -1

1. **Paso 4:** Remplazamos x en (4) o en (5):

(4) x + y =1

(-1) + y = 1

y = 2.

1. **Paso 5:** Remplazamos los valores encontrados de x y de y en una de las tres primeras ecuaciones:

(1) 2x + 3y + z = 8

-2 + 6 + z =8

z = 4.

## REGLA DE CRAMER

Veamos primero como se calcula el determinante A de orden 3 x 3:





Cada uno de los términos de la primera fila (a, d y g) se multiplica por el determinante de orden 2x2 formado por los términos que no pertenecen ni a la fila ni a la columna de cada uno.

**Ejemplo:**

Hallar el determinante:



**Solución:**



Consideremos ahora el siguiente sistema:

x - y - 2z = -8

2x - 4y + 2z = 1

3x + y + 3z = 5

El proceso para resolver un sistema 3x3 por el método de determinantes tiene los mismos pasos que el método para sistemas 2x2, solamente que los determinantes resultantes son de orden 3 x 3.

1. **Paso 1:** Se halla el determinante del sistema.



= 1(-12 - 2) + 1(6 - 6) - 2(2 + 12)

= -14 - 28 = -42

1. **Paso 2:** Se halla x.











1. **Paso 3:** Se calcula y.











1. **Paso 4:** Se halla z.









Z = 3

### Practica lo aprendido

1. Halla los siguientes determinantes:
2. 
3. 
4. 
5. 
6. Desarrolla los siguientes sistemas de ecuaciones:
7. X – y + 3z = 3

3x – 2y + 2z = 0

3x – 4y – z = 1

1. x + y – 2z = 3

X = y + 1

X - y + z = 11

1. 6u – 4v + 2w = -1

5u + 4v – 3w = 3

4u – 2v + 2w = -1

1. 2u + 2v – w = 2

4u – v + w = 4

6u – 2v + 3w = 2

1. 4x + y + 2z = 10

3x + 2y + z = 5

2x + 3y + 2z = 10

1. 





1. X – y = 1

X + z = -1

Y – z = 6

1. Resuelve los siguientes problemas:
2. Halla tres números tales que el primero más el segundo sumen 50, el primero más el tercero sumen 30 y el segundo más el tercero sumen 40.
3. Tres personas tienen cierta cantidad de dinero; la primera y la tercera tienen juntas $ 500 más que la segunda, la segunda y la tercera tienen $ 2500 más que la primera y la segunda tiene $ 4500 más que la tercera. ¿Cuánto tiene cada una?
4. La suma de las tres cifras de un número es 16. La suma de la cifra de las decenas y cente­nas es igual cuádruplo de la cifra de las unidades. Si se invierte la cifra de las unidades y de las decenas, el número se disminuye en 36. ¿Puede existir un número con esas caracterís­ticas?
5. Una persona emplea diariamente 14 horas de trabajo, estudio y diversión. Si en trabajo y diversión emplea 11 horas y en trabajo y estudio 10 horas, ¿cómo emplea su tiempo?
6. Encuentra un número de tres cifras sabiendo que la suma de las dos primeras es igual a la última (de izquierda a derecha) y que al dividir dicho número por 9 el cociente es un múltiplo de 9.

### Prepárate para el ICFES

1. ¿Qué características presenta un sistema de ecuaciones que no tiene solución?
2. ¿Cómo deben ser los coeficientes de las ecuaciones para que el sistema tenga infinitas soluciones?
3. Si una ecuación de dos incógnitas se representa gráficamente por medio de una recta, ¿en qué forma se representa una ecuación de tres incógnitas?
4. Determina si los siguientes sistemas tienen solución o no. Si tiene solución, encuéntrala si no la tiene, resuelve un sistema de tres ecuaciones y muestra que ningún elemento del conjunto solución satisface a la otra ecuación:
5. 2x + y + 3z = -4

X - 4y - 2z = 3

4x - 2y + z = 4

5x + 3y + 4z = 5

1. 2x + 4y + 3z = 5

X – 4y – 2z = 7

4x – 3y + 5z = 2

3x + 2y + 4z = 8

1. Resuelve los siguientes sistemas:
2. 2 - 2x + y - 2z = -4

2w + 2x - 3y - 3z = -1

-w + x + 2y + z = 5

X - 2y + z = 0

1. 3x + 2y = -2

X + y + u = -3

3x - 2y – u = -7

4x + 5y + 6z + 3y = 11

1. 2w - 3x + y - 8z = -2

W + 3x + 2y – z = 5

-w + 2x + y + 3z = 3

3w + 2x + 3y - 7z = 5

1. X – 2y + z + 3u = -3

3x + y – 4z – 2u = 7

2x + 2y – z – u = 1

X + 4y + 2z -5 = 12

1. 2x – 3y + z + 4u = 0

3x + y - 5z – 3u = -10

6x + 2y – z +u = -3

X + 5y + 4z – 3u = -6

1. 2x – 3z – u =2

3y – 2z -5u = 3

4y – 3u = 2

X – 3y + 3u = 0

1. Una parte de $ 250000 se coloca al 5%, otra parte al 6% y una tercera parte al 8% mensual. El interés total que se recibe es $ 16000. Además, el interés de la parte colocada al 8% es igual a la suma de los intereses de las otras dos partes. ¿Qué canti­dad se colocó en cada uno de los por­centajes?

# TEMA 5: FUNCIÓN CUADRÁTICA

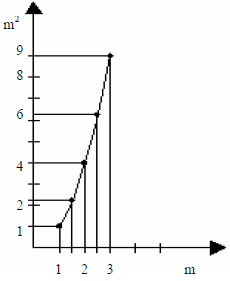
**Concepto:**

Un negocio de decoración, Alfombrix Confort, confecciona tapices cuadrados que miden entre 1 y 3 metros de lado, con diseños exclusivos y a pedido. Queremos ver que superficie tiene los tapices. Teniendo en cuenta que l es el lado del tapiz y t su área, completamos la siguiente tabla de valores y a partir de estos valores realizaremos una representación gráfica.

Tabla 5: Lado y Área

| *l* (m) | *t* (m2) |
| --- | --- |
| 1,00 | 1,00 |
| 1,50 | 2.25 |
| 2,00 | 4,00 |
| 2,50 | 6.25 |
| 3,00 | 9,00 |

Imagen 27: Gráfico de área respecto al lado.



**Descripción Imagen:** Primer cuadrante del plano cartesiano en el cual se une la medida del largo con su valor elevado al cuadrado, los puntos unidos por una curva son: (1, 1), (1,5; 2,25), (2, 4), (2,5; 6,25) y (3, 9). Este gráfico es un segmento de parábola.

Como la longitud del lado puede tomar valores entre 1 y 3 metros, los valores del área estarán comprendidos entre 1  y 9 .

Por consiguiente, el dominio y la imagen de la función t (l) son:

* Dom [t(l)] = [1; 3]
* Im [t(l)] = [1; 9]

## FUNCIONES CUADRÁTICA DE LA FORMULA

La fórmula cuadrática que se usó para construir el ejemplo anterior es un caso particular de  con a perteneciente a los reales distintos a cero.

Estas funciones están definidas para todo número real, es decir que su dominio natural resulta:

Dom (f) = R

En cada caso, la representación gráfica es una parábola y las coordenadas de los puntos del plano que pertenecen a la parábola verifican la ecuación cuadrática:



En el caso anterior, el dominio tenía como intervalo [1; 3] y la función definida es:



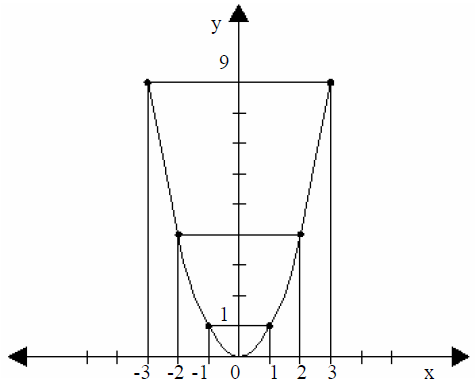
Como el cuadrado de un número es siempre positivo o cero, el conjunto de la imagen es el intervalo 

Tabla 6: Valor de x y su cuadrado

| X |  |
| --- | --- |
| -3 | 9 |
| -2 | 4 |
| -1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |

Como la función f toma el mismo valor para los valores opuesto de x, su gráfico es simétrico con respecto al eje de las ordenadas, su ecuación es x = 0 y se denomina eje de simetría de la parábola.

Imagen 28: Gráfico de los puntos x y su cuadrado.



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se encuentran los puntos (0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), (-3, 9) y (3, 9), la unión de estos puntos describe una parábola la cual es una figura semejante a la letra v en tinta, un poco redondeada.

El único punto de la parábola que pertenece al eje de simetría es el vértice. En este ejemplo es el punto v = (0; 0)

Los puntos de intersección de una parábola con el eje de las abscisas son aquellos en que la ordenada es cero; en este caso sí y = 0; resulta que = 0 y esta ecuación tiene como única solución x = 0. El punto de intersección es el vértice.

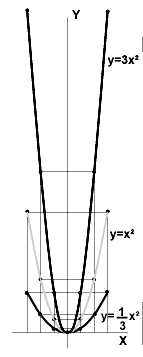
### Representación gráfica de la función

En todos los gráficos de este tipo de funciones se puede observar que el eje de simetría es el eje de las ordenadas (y) con el vértice en el origen del sistema v (0; 0).

En algunos casos el vértice es un valor mínimo y en otros casos es el valor máximo.

* Cuando el coeficiente a es positivo y la ordenada del vértice nula es menor a todas las ordenadas restantes, que son positivas. En consecuencia el vértice es el menor valor de la función.

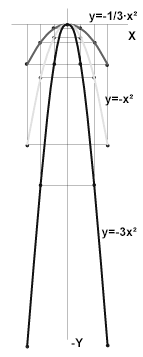
Imagen 29: Parábolas con coeficiente a positivo.



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual hay tres parábolas orientadas hacia el norte, es decir sus dos ramas abren hacia arriba dado que su coeficiente a es positivo.

* Cuando el coeficiente a es negativo, sucede lo contrario, la ordenada nula del vértice es mayor a las restantes ordenadas, que son negativas. En consecuencia el vértice es el máximo valor de la función.

Imagen 30: Parábolas con coeficiente a negativo.



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual hay tres parábolas orientadas hacia el sur, es decir sus dos ramas abren hacia abajo dado que su coeficiente a es negativo.

También puede observarse que para distintos valores de a, la rapidez con la que crecen las ramas de cada una de las parábolas es diferente.

Por ejemplo, dada la función:

, si

 , el gráfico se obtiene dilatando verticalmente el de y =  ; por el contrario sí , con a 0, el gráfico se obtiene contrayendo verticalmente el de y = .

### Traslaciones de la función

**Traslaciones en la dirección del eje de las ordenadas (y)**

La fórmula de la función que permite construir un modelo con la situación anterior es un caso particular de .

Veremos cómo se obtienen los gráficos de las funciones de este tipo a partir del gráfico de  con a R.

**Gráfico de la función **

Comparemos las tablas de valores de las funciones:

* 
* 
* 

Tabla 7: Desplazamientos sobre el eje y

| x |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| -4 | 16 | 19 | 14 |
| -3 | 9 | 12 | 7 |
| -2 | 4 | 7 | 2 |
| -1 | 1 | 4 | -1 |
| 0 | 0 | 3 | -2 |
| 1 | 1 | 4 | -1 |
| 2 | 4 | 7 | 2 |
| 3 | 9 | 12 | 7 |
| 4 | 16 | 19 | 14 |

Los valores de , se obtienen, como es lógico, sumando 3 unidades de la función . Por lo tanto, la gráfica de  se logra subiendo tres unidades la gráfica de 

Como la parábola asciende 3 unidades, el vértice se trasladó a v (0; 3), la imagen es ahora el intervalo .

También podemos decir que la parábola no tiene intersección con el eje de las abscisas; porque la función no se anula para ningún valor de x.

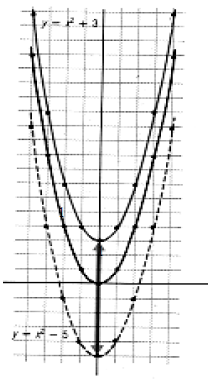
Teniendo la misma consideración anterior, la gráfica  se obtiene bajando cinco unidades la de .

El vértice tiene coordenada v (0; -5), cambiando la imagen al intervalo .

En este caso, la parábola tiene dos puntos de intersección con el eje de las abscisas, son los puntos donde la ordenada es igual a cero. (y =0)

Dichos puntos se denominan ceros, raíces o abscisas al origen de la función.

Imagen 31: Curva desplazada sobre el eje y.



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se muestra la parábola descrita por y = x al cuadrado y un desplazamiento de esta de 3 unidades hacía arriba y otro desplazamiento de la original en 5 unidades hacía abajo. Estás dos parábolas son desplazamientos sobre el eje y.

Para nuestro caso, se obtienen de la siguiente manera:







Las coordenadas son  y 

En el primer caso, no hablamos de ceros o raíces porqué la resolución de la ecuación son dos números complejos conjugados.

Podemos agregar además que todas las parábolas tienen como eje de simetría al eje de las ordenadas (y), que es la recta x = 0. El vértice se desplaza verticalmente según los diferentes valores de k.

En resumen, a partir del gráfico de , para graficar se traslada k unidades las ordenadas de los puntos de la parábola de la siguiente manera: si k es positivo, hacia arriba y hacia abajo, si k es negativo.

El vértice tiene coordenadas v (0; k) y el eje de simetría es x = 0

**Traslaciones en la dirección del eje de las abscisas (x)**

La fórmula de la función que permite construir un modelo con la situación anterior es un caso particular de:



Veremos cómo se obtienen los gráficos de las funciones de este tipo a partir del gráfico

De con a R.

**Gráfico de la función **

Comparemos las tablas de valores de las funciones:

* 

Tabla 8: X y su valor al cuadrado.

| x |  |
| --- | --- |
| -4 | 16 |
| -3 | 9 |
| -2 | 4 |
| -1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |

* 

Tabla 9: Desplazamiento negativo sobre el eje x.

| *x* | *x* 4 |  |
| --- | --- | --- |
| 0 | -4 | 16 |
| 1 | -3 | 9 |
| 2 | -2 | 4 |
| 3 | -1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 |
| 6 | 2 | 4 |

* 

Tabla 10: Desplazamiento positivo sobre el eje x.

| x | X + 3 |  |
| --- | --- | --- |
| -6 | -3 | 9 |
| -5 | -2 | 4 |
| -4 | -1 | 1 |
| -3 | 0 | 0 |
| -2 | 1 | 1 |
| -1 | 2 | 4 |
| 0 | 3 | 9 |

Ahora el vértice de  se encuentra en el punto donde x - 4 = 0, es decir el punto (4; 0), hay un desplazamiento del vértice en dirección horizontal igual a - h, no alterando el rango de la imagen ni del dominio con respecto a .

Hay un desplazamiento del eje de simetría a x = 4.

Análogamente, el vértice de  estará en el punto (-3; 0) y su eje de simetría es x = -3.

Imagen 32: Desplazamientos sobre el eje x.

Desplazamiento de la parábola original en unidades tanto positiva como negativa sobre el eje x.


**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se muestra la parábola descrita por y = x al cuadrado y un desplazamiento de esta de 3 unidades hacía la izquierda y otro desplazamiento de la original en 5 unidades hacía la derecha. Estás dos parábolas son desplazamientos sobre el eje x.

Podemos decir en general, la gráfica de  se obtiene de la gráfica  trasladándola un tramo –h en la dirección del eje de las abscisas (x).

### Traslaciones en cualquier dirección

En algunas ocasiones, las funciones cuadráticas pueden expresarse mediante la ecuación:



Esta función tiene la particularidad de que permite visualizar las coordenadas del vértice de la parábola que están indicadas en la fórmula, de la siguiente manera:



O bien



Donde 

Veremos cómo se obtienen los gráficos de las funciones de este tipo a partir del gráfico de .

Para trasladar la parábola  de modo que su vértice se sitúe en el punto (h; k), transformaremos su ecuación del siguiente modo:

*  se traslada h unidades horizontalmente 
*  se traslada k unidades vertical 

Por ejemplo, vamos a trasladar la parábola  de modo que su vértice se encuentre en el punto V (2; 4).

La parábola  se traslada 2 unidades a la derecha:



Se traslada 4 unidades hacia arriba:

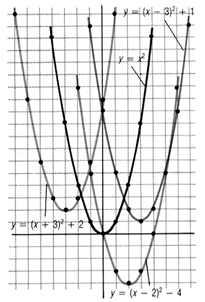


Vemos que el eje de simetría se trasladó 2 unidades. El dominio de la función no se alteró, pero la imagen es ahora el intervalo .

Análogamente, podemos decir que  es una parábola como  con su vértice en (3; -1).

O que  es una parábola como  con su vértice en (-3; 2).

Imagen 33: Parábolas desplazadas en ambos ejes.



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se muestra la parábola original y algunas con ambos desplazamientos. Estos desplazamientos son positivos o negativos sobre cualquiera de los ejes.

En consecuencia podemos decir que una función del tipo , está compuesta por dos movimientos, uno horizontal y otro vertical, siguiendo los conceptos de traslación vistos anteriormente.

Cuando una función cuadrática se expresa de la forma  o , se la Denomina forma ordinaria de la función cuadrática.

Para calcular determinar los puntos, donde la función corta al eje de las abscisas, o sea los ceros, raíces o abscisas al origen, se procede de la siguiente manera:

Partimos que en dichos puntos es como muestra la siguiente figura para los puntos a y b.

Imagen 34: Parábola desplazada sobre el eje y

Parábola orientada hacía el norte con cortes sobre el eje x.


**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se muestra una parábola orientada hacia el norte y un desplazamiento de esta de 3 unidades hacía abajo, vértice sobre el eje y. La parábola corta al eje x en los puntos identificados con (x1, 0) y (x2, 0).

Por lo tanto igualamos a cero la expresión canónica:



Despejamos x:











**Ejemplo:**

Calcular las raíces de la función 

Como y = 0 tenemos que:







 Y 

Las coordenadas de las raíces son: (5, 0) y (1, 0)

Otro punto característico es la ordenada al origen, es el punto donde la función corta al eje de las ordenadas, por lo tanto como cualquier punto de este eje tiene abscisa nula, podemos escribir x = 0 en la función canónica.







**Ejemplo:**

Calcular la ordenada al origen 

Como x = 0, tenemos que:







Y = 10

La coordenada de la ordenada al origen es (0, 10)

## OTRA FORMA DE EXPRESAR UNA FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

Vimos que se denomina forma canónica de la función de segundo grado si se expresa de la forma:



Si, ahora, se expresa en función de sus raíces de la siguiente manera:



Se denomina forma factorizada de la función cuadrática.

Si se desarrolla el cuadrado del binomio y se suma de la forma canónica o se aplica propiedad distributiva al producto de los binomios de la forma factorizada, se obtiene una nueva forma del tipo:



Que se denomina forma polinómica, donde el coeficiente a es el mismo valor en todas las formas y c es la ordenada al origen de la parábola

* a es el coeficiente del término de segundo grado
* b es el coeficiente del término lineal o de primer grado
* c es el término independiente

### Gráfico de la función polinómica

Vamos a graficar ahora la función cuadrática de la forma polinómica; o sea .

También a esta función se la denomina función cuadrática completa.

Para poder graficar este tipo de función será necesario encontrar puntos característicos.

* **Ordenada al origen:**

Es el punto de intersección de la parábola y el eje de las ordenadas; es decir x = 0

Su coordenada es (o, c)

* **Abscisas al origen, raíces o ceros:**

Las abscisas al origen, raíces o ceros de la función son los puntos de intersección de la parábola con el eje de las abscisas; es decir y=0.

Para encontrar estos puntos procedemos completando el cuadrado

1. Se hace la función igual a cero (y=0)



1. Se extrae factor común a:



1. En el paréntesis se completa un trinomio cuadrado perfecto



Los tres primeros términos del paréntesis forman un trinomio cuadrado perfecto que se puede expresar como el cuadrado de un binomio.



1. Se despeja x:







1. La fórmula resolvente es:



Debemos aclarar, que también lo podemos resolver por el método de completar el cuadrado visto anteriormente.

**Ejemplo:**

Resolver la siguiente ecuación 

Como a =2, b = -5 y c =2, podemos reemplazar en la fórmula resolvente:











De donde:









### Vértice de la parábola

Es el valor máximo o mínimo, según el tipo de parábola, que puede tomar la función. Para calcular estas coordenadas se puede proceder de dos formas diferentes

1. Transformando la función de forma polinómica en forma canónica, procediendo de la siguiente manera:
2. Se extrae factor común a:





1. Se suma y se resta , formando un trinomio cuadrado perfecto:





1. Aplicando propiedad distributiva:



1. Llamando  y  y remplazando en la función anterior, tenemos:



Donde h y k son las coordenadas del vértice, es decir:

v = (h, k)

O bien



1. Como la parábola tiene eje de simetría, entonces debe pasar por el medio de las raíces, es decir:



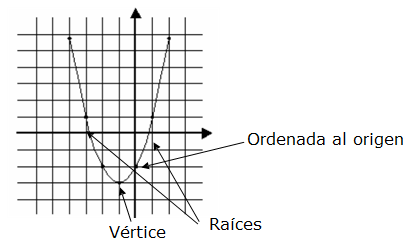
Y reemplazando en la función obtendremos el valor de la ordenada.





Los puntos a graficar son los siguientes

Imagen 35: Puntos Característicos



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se muestra una parábola orientada hacia el norte en la cual el punto mínimo se señala con una flecha que lo identifica como el vértice, los cortes con el eje x señalados con flechas que los identifican como raíces y el corte con el eje y identificado como una flecha que indica que es la ordenada al origen. Estos son los puntos característicos de una parábola.

**Ejemplo**

Graficar la función .

Aplicando las fórmulas correspondientes tenemos:

1. Ordenada al origen: (0;10)
2. Ceros de la función:



Si a = 2, b =-12, c = 10 y reemplazando:













1. Vértice





h = 3





K = 2 X 9 – 36 + 10

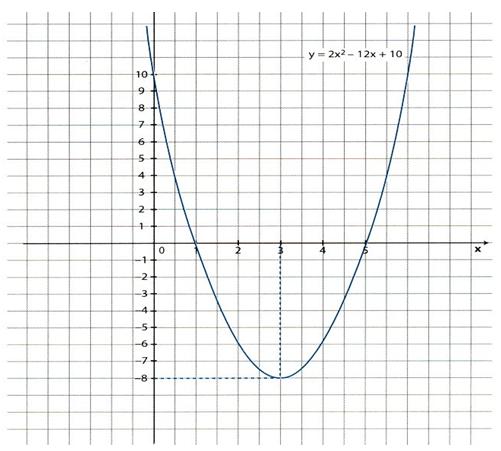
K = -8

V = (3, -8)

1. Eje de Simetría

Una vez obtenido los puntos característicos y podemos hacer una gráfica aproximada

Imagen 36: Gráfica de la función.



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se muestra la parábola descrita por la función anterior su vértice es el punto (3, -8), corta al eje x en los puntos x=1 y x=5. Corta el eje y en y = 10. Esta es una parábola con los dos tipos de desplazamientos.

## DISCRIMINANTE

Dada la ecuación de segundo grado , cuya fórmula resolvente es:

 Se denomina discriminante a la expresión  y se lo simboliza con la letra griega  (delta).

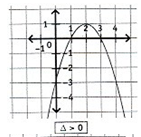


El discriminante determina qué tipo de raíces tiene la función de segundo grado, asociada a su ecuación.

Según la resolución del discriminante, pueden suceder tres casos:

1. , la ecuación tiene dos raíces reales distintas. Está asociado a una función cuadrática cuyo gráfico atraviesa en dos puntos el eje de las abscisas.

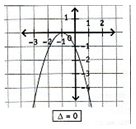
Imagen 37: Dos cortes con el eje x



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se muestra una parábola orientada hacia el sur, el vértice de la parábola tiene ordenada positiva, por tanto corta x en dos puntos.

1. , la ecuación tiene una raíz real doble. Está asociado a una función cuadrática cuyo gráfico toca en un solo punto el eje de las abscisas.

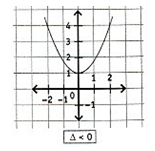
Imagen 38: Un corte con el eje x.



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se muestra una parábola orientada hacia el sur, el vértice de la parábola tiene ordenada cero, por tanto este es el único punto en el que toca al eje x.

1. , la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas. Está asociado a una función cuadrática cuyo gráfico no toca en dos puntos el eje de las abscisas.

Imagen 39: Sin cortes con el eje x.



**Descripción Imagen:** Plano cartesiano en el cual se muestra una parábola orientada hacia el norte, el vértice de la parábola tiene abscisa y ordenada positivas, por tanto no corta al eje x en ningún punto.

### Practica lo aprendido

1. Una función cuadrática de la forma  toma el valor 7 para x = -1 y para x =2. Determina esta función.
2. Sea la función . Determina m sabiendo que la gráfica pasa por el punto (2, 7).
3. Sea la función . Determina m y n sabiendo que la gráfica pasa por los puntos (1, 0), (-3,4).
4. Sea la función . Determina a, b, c sabiendo que la gráfica pasa por los puntos (1, 0), (0, 0), (-1, 2).
5. Dibuja las siguientes funciones cuadráticas:
6. y =  - 6x + 10
7. y =  - 4x + 4
8. y = - -4x – 2
9. y = - 4
10. y = -2 - x + 6
11. y =  + 2x + 2
12. Una función cuadrática viene dada por la tabla siguiente:

Imagen 40: Relación x, y

| x | Y |
| --- | --- |
| -4 | 17 |
| -3 | 10 |
| -2 |  |
| -1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 |  |
| 2 | 5 |
| 3 |  |
| 4 | 17 |

1. Completa la tabla teniendo en cuenta la simetría.
2. ¿Puedes determinar la fórmula que define esta función?
3. ¿Tiene valores negativos esta función?
4. Determina una función que calcule el producto de dos números que suman 32. ¿Qué tipo de función es? Dibújala.
5. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
6. f(x) = 
7. g(x) =  + 2
8. h(x) =  - 4
9. m(x) =  + 4

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?

1. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
2. f(x) = -2
3. g(x) = -2 + 2
4. h(x) = -2 - 2
5. m(x)= -2 + 8

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?

1. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
2. f(x) = 
3. g(x) = 
4. h(x) = 
5. m(x) = 

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?

1. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
2. f(x) = -2
3. g(x) = -2
4. h(x) = -2
5. m(x) = -2

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?

1. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
2. f(x) = 
3. g(x) =  + 1
4. h(x) =  - 4
5. m(x) =  + 2

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?

1. Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra recorre la siguiente función:

f (t) = -5 + 50t

Siendo t es el tiempo en segundos, y f (t) la altura en metros.

1. Calcula el segundo que alcanza la máxima altura y cuál es la máxima altura.
2. ¿En qué segundo cae a tierra? Representa la función.
3. Un jugador de fútbol se encuentra a 8 metros de la portería. El portero está a 4 metros y puede cubrir saltando hasta 2,5 metros de altura. El jugador puede escoger para hacer el lanzamiento entre dos trayectorias, las correspondientes a las funciones y = 1,6x – 0,2. ¿Cuál es mejor? ¿Por qué?

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

* + - 1. Ramos, J.(2000). *Supermat Matemáticas.* Editorial Voluntad. Bogotá.
      2. Ortega, j. *Métodos De Resolución De Sistemas De Ecuaciones Lineales*. Recuperado de: <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~29700989/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/apuntes/sistemas.pdf> el 15 de agosto de 2015.
      3. Monserrat (2005). *Función Cuadrática.* Recuperado de: <http://www.monserrat.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/1132/mod_resource/content/0/funcion_cuadratica.pdf> el 20 de agosto de 2015.