Logo Ministerio de educación



**MATEMÁTICAS**

Guía de Apoyo Educativo en el área de las matemáticas.

Conceptos de propiedades de las expresiones algebraicas grado 8º de educación básica secundaria

Autor:

Adriana Quintero Palomino

Tabla de contenido

[TEMA 1: OPERACIONES CON NÚMEROS REALES 6](#_Toc427593922)

[1.1 OPERACIONES CON NÚMEROS REALES 8](#_Toc427593923)

[1.1.1 ADICIÓN 9](#_Toc427593924)

[1.1.2 SUSTRACCIÓN 11](#_Toc427593925)

[Practica lo aprendido 13](#_Toc427593926)

[1.1.3 MULTIPLICACIÓN 16](#_Toc427593927)

[1.1.4 DIVISIÓN 23](#_Toc427593928)

[Practica lo aprendido 25](#_Toc427593929)

[1.1.5 MULTIPLICACIÓN DE UN REAL POR UN ENTERO 27](#_Toc427593930)

[1.2 POTENCIACIÓN EN R CON EXPONENTES ENTEROS 28](#_Toc427593931)

[1.2.1 PRODUCTO DE POTENCIAS 28](#_Toc427593932)

[1.2.2 COCIENTE DE POTENCIAS 31](#_Toc427593933)

[Practica lo aprendido 33](#_Toc427593934)

[1.2.3 POTENCIAS DE EXPONENTE 0 34](#_Toc427593935)

[1.2.4 POTENCIA DE UNA POTENCIA 35](#_Toc427593936)

[1.2.5 POTENCIA DE UN PRODUCTO 36](#_Toc427593937)

[1.2.6 POTENCIA DE UN COCIENTE 37](#_Toc427593938)

[Practica lo aprendido 38](#_Toc427593939)

[1.3 NOTACIÓN CIENTÍFICA 39](#_Toc427593940)

[Practica lo aprendido 45](#_Toc427593941)

[1.4 OPERACIONES INVERSAS DE LA POTENCIACIÓN EN R 46](#_Toc427593942)

[1.4.1 RADICACION 46](#_Toc427593943)

[1.4.2 RADICALES SEMEJANTES 49](#_Toc427593944)

[Practica lo aprendido 50](#_Toc427593945)

[1.4.3 RAÍCES DE PRODUCTOS 51](#_Toc427593946)

[1.4.4 RAÍCES DE COCIENTES 53](#_Toc427593947)

[1.4.5 RACIONALIZACIÓN 55](#_Toc427593948)

[Practica lo aprendido 58](#_Toc427593949)

[1.4.6 POTENCIAS Y RAÍCES RADICALES 59](#_Toc427593950)

[Practica lo aprendido 61](#_Toc427593951)

[1.5 LOGARITMACIÓN 62](#_Toc427593952)

[Practica lo aprendido 67](#_Toc427593953)

[TEMA2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS 70](#_Toc427593954)

[2.1 VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO 73](#_Toc427593955)

[Practica lo aprendido 74](#_Toc427593956)

[Prepárate para el ICFES 85](#_Toc427593957)

[2.2 OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS 87](#_Toc427593958)

[2.2.1 ADICIÓN DE POLINOMIOS 90](#_Toc427593959)

[2.2.2 SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS 92](#_Toc427593960)

[Practica lo aprendido 95](#_Toc427593961)

[2.2.3 PRODUCTO ENTRE POLINOMIOS 102](#_Toc427593962)

[Practica lo aprendido 112](#_Toc427593963)

[Prepárate para el ICFES 124](#_Toc427593964)

[2.2.4 DIVISIÓN DE POLINOMIOS 126](#_Toc427593965)

[Practica lo aprendido 133](#_Toc427593966)

[TEMA 3: PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES 139](#_Toc427593967)

[3.1 PRODUCTOS NOTABLES 139](#_Toc427593968)

[3.2 COCIENTES NOTABLES 147](#_Toc427593969)

[Practica lo aprendido 149](#_Toc427593970)

[Prepárate para el ICFES 159](#_Toc427593971)

[Curiosidades Matemáticas 164](#_Toc427593972)

[Pasatiempos Inteligentes 164](#_Toc427593973)

[Proyecto 168](#_Toc427593974)

[TEMA 4: FACTORIZACIÓN 174](#_Toc427593975)

[FACTORIZACIÓN O DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL 178](#_Toc427593976)

[4.1 FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES QUE CONTIENEN FACTORES COMUNES 179](#_Toc427593977)

[Practica lo aprendido 183](#_Toc427593978)

[Prepárate para el ICFES 192](#_Toc427593979)

[Curiosidades Matemáticas 193](#_Toc427593980)

[4.2 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS 193](#_Toc427593981)

[Practica lo aprendido 197](#_Toc427593982)

[Practica lo aprendido 201](#_Toc427593983)

[Curiosidades Matemáticas 203](#_Toc427593984)

[4.3 FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS 204](#_Toc427593985)

[Practica lo aprendido 207](#_Toc427593986)

[Prepárate para el ICFES 212](#_Toc427593987)

[4.4 FACTORIZACIÓN CON COMBINACIÓN DE CASOS 216](#_Toc427593988)

[Practica lo aprendido 218](#_Toc427593989)

[Prepárate para el ICFES 221](#_Toc427593990)

**Tabla de Imágenes**

[Imagen 1: Operaciones con reales. 7](#_Toc427593991)

[Imagen 2: Perímetro de ABCD 9](#_Toc427593992)

[Imagen 3: Cuadrado ABCD 10](#_Toc427593993)

[Imagen 4: Sustracción no conmutativa. 11](#_Toc427593994)

[Imagen 5: Triángulo ABC 13](#_Toc427593995)

[Imagen 6: Cuadrados sobre el plano 15](#_Toc427593996)

[Imagen 7: Rectángulo MNPQ 16](#_Toc427593997)

[Imagen 8: Paralelepípedo 17](#_Toc427593998)

[Imagen 9: Unión de Cuadrado y Rectángulo. 18](#_Toc427593999)

[Imagen 10: Rectángulo ABCD 20](#_Toc427594000)

[Imagen 11: Cubo de arista 5 cm 25](#_Toc427594001)

[Imagen 12: Producto de Potencias 28](#_Toc427594002)

[Imagen 14: Pentágono 76](#_Toc427594003)

[Imagen 15: Rectángulo 77](#_Toc427594004)

[Imagen 16: Figura Plana 77](#_Toc427594005)

[Imagen 17: Triángulo 78](#_Toc427594006)

[Imagen 18: Proceso de suma de polinomios. 90](#_Toc427594007)

[Imagen 19: Resta de polinomios. 92](#_Toc427594008)

[Imagen 20: Proceso de multiplicación de polinomios. 106](#_Toc427594009)

[Imagen 21: Pieza Rectángular 106](#_Toc427594010)

[Imagen 22: Pieza Rectangular con cuadrados de lado x recortados en cada esquina. 107](#_Toc427594011)

[Imagen 23: Caja Abierta 107](#_Toc427594012)

[Imagen 24: Triángulo de Pascal 109](#_Toc427594013)

[Imagen 25: Ejercicio a. 112](#_Toc427594014)

[Imagen 26: Ejercicio b. 112](#_Toc427594015)

[Imagen 27: Ejercicio C. 112](#_Toc427594016)

[Imagen 28: Círculo 116](#_Toc427594017)

[Imagen 29: Ejercicio a. 119](#_Toc427594018)

[Imagen 30: Ejercicio b. 120](#_Toc427594019)

[Imagen 31: Lado cuadrado. 120](#_Toc427594020)

[Imagen 32: Proceso de División de Polinomios 128](#_Toc427594021)

[Imagen 33: Proceso de División Sintética 131](#_Toc427594022)

[Imagen 34: Bloque 1. 135](#_Toc427594023)

[Imagen 35: Bloque 2 135](#_Toc427594024)

[Imagen 36: Representación Geométrica. 140](#_Toc427594025)

[Imagen 37: Rectángulo con división cuadrada. 143](#_Toc427594026)

[Imagen 38: Producto Notable. 158](#_Toc427594027)

[Imagen 39: Círculo en el cuadrado. 159](#_Toc427594028)

[Imagen 40: Rectángulo 161](#_Toc427594029)

[Imagen 41: Cuadrado 162](#_Toc427594030)

[Imagen 42: Triángulo de Pascal. 164](#_Toc427594031)

[Imagen 43: Producto Notable. 168](#_Toc427594032)

[Imagen 44: Cuadrado. 169](#_Toc427594033)

[Imagen 45: División en cuadrado 170](#_Toc427594034)

[Imagen 46: Pliegue en esquina. 170](#_Toc427594035)

[Imagen 47: Divisiones punteadas. 171](#_Toc427594036)

[Imagen 48: Binomio al cuadrado 175](#_Toc427594037)

[Imagen 49: Casos de Factorización. 177](#_Toc427594038)

[Imagen 50: Gráfico para ejercicio. 201](#_Toc427594039)

[Imagen 51: Circunferencia. 202](#_Toc427594040)

[Imagen 52: Cuadrado 203](#_Toc427594041)

[Imagen 53: Secuencias en figuras 211](#_Toc427594042)

[**Imagen 54:** Octaedro triangular. 213](#_Toc427594043)

[**Imagen 55:** Icosaedro triangular 213](#_Toc427594044)

[**Imagen 56:** Tetraedro con Triángulo Isósceles. 214](#_Toc427594045)

[**Imagen 57:** Hexaedro (Cubo con cuadrados) 214](#_Toc427594046)

[**Imagen 58:** Dodecaedro con pentágonos regulares. 214](#_Toc427594047)

**Tabla de Tablas**

[Tabla 1: Potencias de 10 43](#_Toc427594050)

[Tabla 2: Relación de Valores de x, y 84](#_Toc427594051)

[Tabla 3: Valor polinómico. 116](#_Toc427594052)

[Tabla 4: División entre polinomios 133](#_Toc427594053)

# TEMA 1: OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

La introducción de los números reales y sus operaciones amplió el campo de aplicaciones de las matemáticas; actualmente constituyen la base de la teoría de la información. En el siglo XIX, el avance y desarrollo de las ciencias físicas hicieron que las matemáticas y en particular la aritmética de los números reales se emplearan para la formulación de leyes y teorías. A partir de entonces, las matemáticas se integraron a las actividades del hombre y al desarrollo de las ciencias sociales.

Con los números reales y sus operaciones queda totalmente resuelto el problema de la medición de cantidades de cualquier magnitud y su expresión exacta y se afianzan los conceptos y nociones de la geometría elemental.

Actualmente son utilizadas en la economía, en la organización sistemática de tareas complejas, en la estadística y en la resolución de problemas difíciles de control.

Dos recipientes de la misma forma y con igual capacidad se llenan con soluciones de agua y alcohol en la razón p: 1 en uno de ellos y en la razón q: 1 en el otro, p y q representan las partes de agua por una de alcohol.

Si se mezcla el contenido de los dos recipientes, ¿cuál es la razón del volumen de alcohol al volumen de agua?

**¿Qué vamos a aprender?**

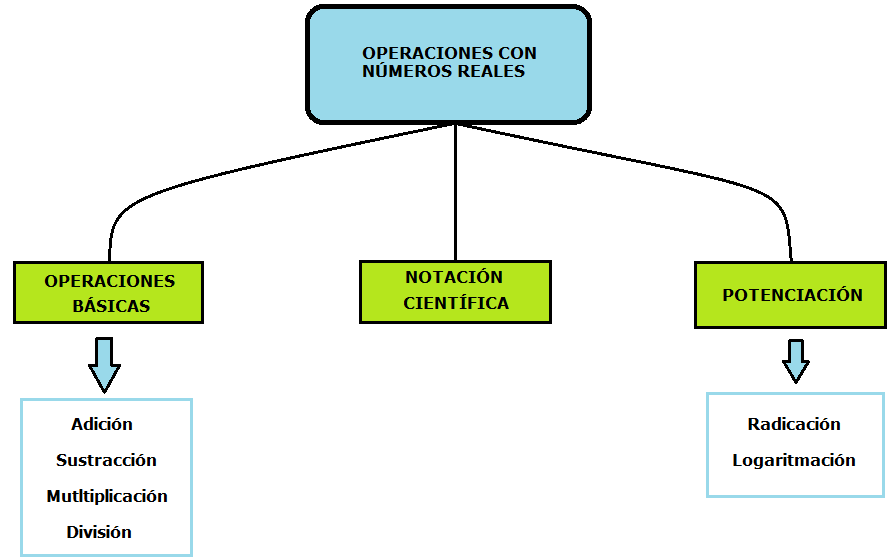
Después de repasar las operaciones con expresiones decimales finitas y practicar sus algoritmos, precisaremos la escritura de un decimal y la relacionaremos con la notación científica.

Representaremos los números reales en forma simbólica y extenderemos a ellos todas las operaciones con sus propiedades realizadas en el sistema de los números racionales. Practicaremos los algoritmos de la potenciación y sus operaciones inversas: radicación y logaritmación. Determinaremos las propiedades de las raíces y los logaritmos. Formu­laremos y resolveremos problemas que requieren operaciones entre números reales para su solución.

**¿Para qué nos sirve lo aprendido?**

Las características del sistema de los números reales R (+, , , <, >) nos permitirán avanzar en la ion y aplicación de las propiedades de las operaciones, hacer conjeturas y adquirir las bases para justificar los pasos dados en un proceso deductivo en el que se emplean tales números. Con los números reales y sus operaciones podemos efectuar análisis de funciones, como por ejemplo determinar la rentabilidad de una empresa en fun­ción de la relación costo/beneficio.

Imagen 1: Operaciones con reales.



**Descripción Imagen:** Mapa conceptual de título Operaciones con números reales, de este título se desprenden 3 títulos: de izquierda a derecha “Operaciones Básicas”, “Notación Científica” y “Potenciación”. Del título Operaciones Básicas se desprende un cuadro en el cual están escritos uno debajo de otro: Adición, Sustracción, Multiplicación y División. Del título Potenciación se desprende un cuadro en el cual está escrito Radicación y Potenciación.

## OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

Operaciones con números reales

A continuación analizaremos algunos aspectos del manejo de números reales que no se han presentado hasta ahora en los sistemas de los números N, Z y Q utilizando los truncamientos o aproximaciones de las expresiones decimales infinitas.

## ADICIÓN

Así que (2 + ) +  = 2 + ( + ).

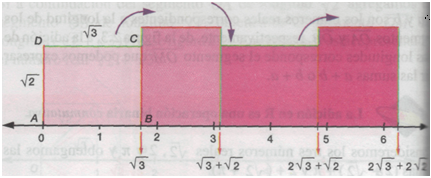
En general, si a, b, c son tres números reales correspondientes longitudes de los segmentos ,  y (a + b) + c = a + (b + c); por tanto, podemos escribir a + b + c para indicar cualquiera de las dos sumas anteriores.

La adición en R es una operación binaría asociativa.

En la imagen siguiente se tiene el rectángulo ABCD tal que AB = CD =  y BC = DA = .

Sabemos que el perímetro de una figura es la suma de las longitudes su contorno, así:

Imagen 2: Perímetro de ABCD



**Descripción Imagen:** Dibujo de la recta real sobre está las rotaciones del rectángulo ABCD, tocando cada uno de los puntos correspondientes a las medidas de sus lados.

**Perímetro de ABCD**

= AB + BC + CD + DA

= ( +  +  + )

= [(+) + (+)] (mediante la aplicación de las propiedades conmutativa y asociativa de la adición en R)

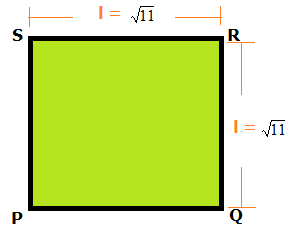
Las expresiones  +  y  +  podemos abreviarlas mediante los símbolos 2 y 2.

Perímetro de ABCD = 2 + 2

=2( + )

El perímetro del cuadrado PQRS en la siguiente figura cuyo lado l mide es:  +  +  +  = 4, que leemos: "cuatro veces la raíz cuadrada de once" o "cuatro por la raíz cuadrada de once".

Imagen 3: Cuadrado ABCD

****

**Descripción Imagen:** Cuadrado con vértices P, Q, R, S la medida del lado SR está descrita como l =  y la medida del lado RQ está descrita como l = .

## SUSTRACCIÓN

Para cada número real positivo a existe asociado otro número real llamado opuesto o negativo de a que representamos por -a y tal que:

a + (-a) = 0

Si a y b son dos números reales, entonces la diferencia entre a y b es la suma de a + (-b) que denotamos por a - b.

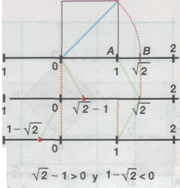
En la recta numérica, se debe observar que OB - OA =  - 1; es decir,  + (-1).

La operación binaria en R que asocia a cada par de números reales a y b su diferencia a - b se llama sustracción en R.

La sustracción en R no es conmutativa:



Imagen 4: Sustracción no conmutativa.



**Descripción imagen:** Proceso de resta sobre la recta real de números reales.

Si en la recta numérica efectuamos primero  - 1 y después 1 - , obtenemos puntos en diferente posición. Al número  - 1 le corresponde un punto que representa un número positivo; a 1 -  le corresponde un punto que representa un número negativo.

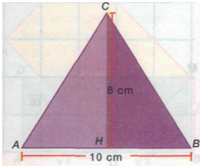
La sustracción en R no es asociativa:



### Practica lo aprendido

1. Representar en la recta real la posición que corresponde al número que resulta de las siguientes operaciones:
2. 2 + 
3.  +  + 2
4.  +  + 
5.  - 
6.  - 
7.  - 1
8. De los lados de un cuadrilátero ABCD miden cada uno cm y los otros miden  y cm. Determinar:
9. El perímetro.
10. La diferencia entre el lado más largo y el más corto.
11. Encontrar el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles cuyo cateto mide 5 cm.
12. Encontrar el perímetro del triángulo isósceles de la siguiente imagen si se sabe que AB mide 10 cm, BC = CA y la altura CH mide 8 cm. (CH es perpendicular a AB y AH = HB).

Imagen 5: Triángulo ABC



**Descripción Imagen:** Triángulo equilátero de vértices ABC, la longitud de la base AB está descrita como 10 cm, en la mitad de este segmento está escrita la letra H que se une con la altura en el punto C y tiene una medida descrita como 8cm.

1. Utilizar las propiedades conmutativa y asociativa de la adición en R para expresar de tres maneras diferentes la suma:



1. Representar en la recta real:
2. 1 +  y el número opuesto: - (1 + )

¿-(1 + ) = - 1 - ? Explicar la respuesta.

1. . Constatar que: 
2. Encontrar el inverso aditivo u opuesto de los siguientes números reales:
3. 
4. 
5. -( - )
6.  - 
7. (- ) - 
8. Efectuar:
9. 
10. 
11. 
12. 
13. 
14. 
15. Verificar con una calculadora que:
16. 
17. 
18.  > 0 y  < 0.
19. 

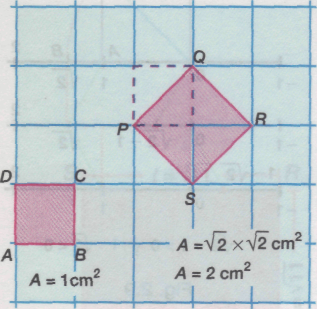
"Las matemáticas han progresado a través de hombres que se han distinguido por el poder de su intui­ción más que por la capacidad para hacer demostraciones rigu­rosas".

Morris Kline

## MULTIPLICACIÓN

Determinemos el área de los cuadrados ABCD y PQRS de la siguiente imagen:

Imagen 6: Cuadrados sobre el plano



**Descripción Imagen:** Cuadrícula en la cual se encuentran los cuadrados ABCD y PQRS, al lado del cuadrado ABCD está escrito A= 1  y debajo del cuadrado PQRS está escrito A =  X y debajo de esto A = 2 .

El cuadrado ABCD tiene área igual a 1 .

El cuadrado PQRS, de longitud de lado , tiene 2  de área porque:

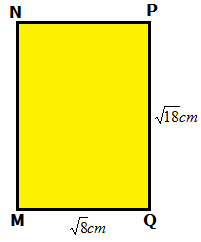
* Área de PQRS:



Es decir: 

En la siguiente imagen el rectángulo MNPQ tiene dimensiones  cm y cm.

Imagen 7: Rectángulo MNPQ

****

**Descripción Imagen:** Rectángulo MNPQ el lado MQ mide  y el lado PQ mide 

El área de MNPQ = base por altura:



Es decir:



Si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces el resultado de multiplicar a por b es el producto a x b o simplemente ab, el cual es un número real único. La multiplicación en R es una operación binaría.

Para obtener el área de un rectángulo, simplemente efectuamos el producto de sus dos dimensiones sin importar el orden.

Si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces los productos ab y ba son números reales iguales.

La multiplicación en R es una operación binaria conmutativa.

a • b = b • a

Para obtener el volumen de un paralelepípedo recto se efectúa el producto de sus dimensiones.

Imagen 8: Paralelepípedo

****

**Descripción Imagen:** Paralelepípedo de ancho a m, alto c m y profundidad b m.

Volumen = (largo x ancho) x altura.

= a m x b m x.cm = (a x b x c) 

Observemos que ese volumen puede obtenerse mediante el producto una de sus caras por la otra dimensión. Así:

Volumen = a m x (b m x c m) = a m x bc  = abc 

O también:

Volumen = (a m x d m) x c m = ab  x c m = abc 

Es decir, si a, b y c son tres números reales cualesquiera, entonces

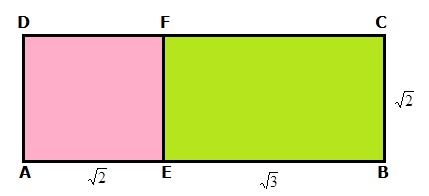
V = (a • b) • c = a • (b • c) = (a • c) • b = a • b • c

La multiplicación en R es una operación binaría asociativa.

**Ejemplos:**

1. Supongamos que un terreno rectangular mide de largo  km y de ancho  km. Determinemos su área.

Imagen 9: Unión de Cuadrado y Rectángulo.



**Descripción Imagen:** Cuadrado de vértices ADFE unidos a este el rectángulo FECB. La medida del lado AE es , la del lado EB es  y la del lado CB es

**Solución:**

Área de1 rectángulo ABCD = 

De otra manera, para calcular el área del rectángulo ABCD podemos dividir el área en otros dos terrenos rectangulares más pequeños y luego sumar sus áreas como se muestra en la imagen anterior.

Área de ABCD = Área de AEFD + Área de EBCF





Por tanto:

Si a, b, c son tres números reales positivos y el terreno rectangular que tiene de largo a + b unidades de longitud y de ancho c unidades de longitud, entonces su área es:

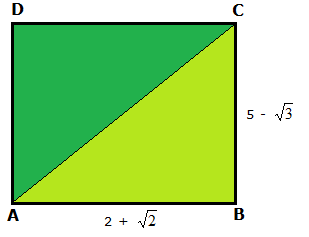
Área ABCD = (a + b) x c (unidades de área)

= ac + bc (unidades de área)

La multiplicación en R es distributiva respecto a la adición.

1. Determinemos la medida de la diagonal del rectángulo ABCD de la siguiente imagen donde AB = 2 +  y BC = 5 - .

Imagen 10: Rectángulo ABCD



**Descripción Imagen:** Rectángulo de vértices ABCD con medida del lado ABDE 2 +  y del lado CB 5 - .

**Solución:**

Por el teorema de Pitágoras sabemos que:





 (Propiedad distributiva)

 (Propiedad distributiva

(Definición de cuadrado y propiedad conmutativa)

(Propiedad asociativa)

(Adición en R)

= (propiedad conmutativa)

(Propiedad asociativa)

En forma similar,





Concluimos:



 (Propiedad conmutativa y asociativa)



Entonces:



## **DIVISIÓN**

Si a es un número real diferente de cero, entonces existe el número real  tal que:



Así,  y  son números reales, tales que:



El número real  , donde a  0, se llama recíproco de a o también inverso multiplicativo del número real a.

Para todo número real a, con a 0, existe el número real , tal que:



**Ejemplos:**

1. El inverso multiplicativo de los números reales , , -5,  y  son respectivamente , , , , .

Si multiplicamos un número real a por el inverso multiplicativo de un número real b 0, se obtiene el número real  que escribimos  y llamamos cociente de los números reales a y b.

1. Encontremos todos los posibles cocientes entre los números reales 2, ,  y 0.

Solución:

Los números 2, ,  tienen inverso multiplicativo. El cero no tiene inverso multiplicativo.

Entonces, los posibles cocientes , , , , , ,  son números reales.

La operación en R que asocia a cada par de números reales a y b, con b 0, el cociente  se llama división en R.

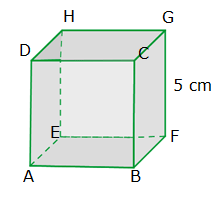
La división es una operación unívoca definida en R\*, es decir, en el conjunto de los números reales diferentes de cero.

El conjunto R\* es el conjunto de los números real excepto cero. R\* = R - {0}.

### Practica lo aprendido

1. Efectuar cada una de las siguientes operaciones en R y simplificar si es posible:
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. Si a, b y c son números reales, calcular los siguientes productos:
10. (a + b)(a-b)
11. (a + b)(a + b)
12. (a - b) (a - c )
13. (a + b) (a + c )
14. (a - b)(b - c)
15. La arista del cubo de la imagen mide 5 cm. Calcular:

Imagen 11: Cubo de arista 5 cm

****

**Descripción Imagen:** Cubo de vértices A, B, C, D en la tapa frontal, vértices A, B, E, F en la base y D, C, G, H en la tapa. Cada arista del cubo mide 5 cm.

1. La longitud de la diagonal EB de la base ABFE.
2. La longitud de la diagonal EC del cubo.
3. La superficie total del cubo.
4. El volumen del cubo.
5. Si a =, b = , encontrar el valor de: .
6. Si a = , b = , encontrar el valor de .
7. Si x = , y =  donde a y b , calcular , , .
8. Si x = , y = , calcular xy, .

## MULTIPLICACIÓN DE UN REAL POR UN ENTERO

Para efectuar la multiplicación de un número real a por un número entero n, conviene distinguir cuatro casos:

1. n = 0. En tal caso, el operador correspondiente 0 x es el operador anulador y obtenemos 0 x (a) = 0.

Para todo número real a: 0 X a = a X 0 = 0.

1. n = 1. En tal caso, el operador correspondiente 1 X es el operador idéntico y obtenemos 1 X (a) = 1 X a = a.

Para todo número real a: 1 X a = a X 1 = a.

El número real 1 es identidad o neutro para la multiplicación en R.

1. n  y n  1. En tal caso, el producto n X a es igual a la suma que se obtiene tomando como sumando el número a, n veces.

Para n , n  1 y todo número real a, se tiene que n X a = a + a + a +… + a.

1. n . En este caso, el producto n X a es igual a la suma que se obtiene tomando como sumando el inverso aditivo -a, del número real a,  veces. (El número n en valor absoluto.)

Para n  y todo número real a, se tiene que n X a = (-a) + (-a) + (-a) +... + (-a).

## POTENCIACIÓN EN R CON EXPONENTES ENTEROS

En los grados anteriores estudiamos las potencias de exponente natural en los conjuntos N, Z y Q, en los cuales si a  Q y n  N, n  1, entonces:



La misma definición sirve para las potencias de exponente natural de los números reales. De modo que si a es un número real, entonces : significa a X a X... X a

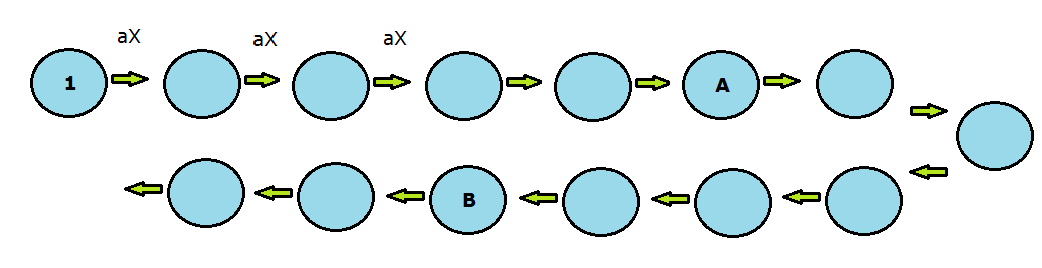
En particular  es, por definición, igual a la base a.

 Para todo a  R.

## PRODUCTO DE POTENCIAS

Consideremos que a es un número real; observemos el esquema la imagen siguiente que podemos prolongarlo tanto como queramos y en donde encima de cada flecha tenemos el operador a X.

Imagen 12: Producto de Potencias

****

**Descripción Imagen:** 14 círculos en línea separados por flecha de punta derecha en el primer círculo hay escrito ene l centro un 1, en el sexto círculo hay escrito en el centro una A en el círculo 12 hay escrito en el centro una letra B, sobre las 3 primeras flechas está escrito el operador aX.

Para describir el camino recorrido, basta decir que parte de 1 y cubre cinco flechas para llegar a A. Es decir:

a X a X a X a X a x (1), es equivalente a .

Análogamente, la escritura



Significa que se parte de A y se recorren seis flechas.

Si en cada círculo escribimos el número con que se llega a él saliendo de 1, en lugar de A habrá que escribir  y en lugar de B habrá escribir . Pero también a B se llega con el recorrido , es de . Para que B tenga el mismo número:



En general, si a  R, p  N y q  N como  y , entonces:

 Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación en R tenemos:



El producto de dos potencias naturales de la misma base es otra potencia natural de la misma base. El nuevo exponente es la suma de los exponentes dados. Para todo a  R, m  N y n  N se cumple que:



**Ejemplos:**

Simplifiquemos los siguientes productos:

1. 
2. 
3. 

## COCIENTE DE POTENCIAS

Si  y , entonces:



Si en lugar de tomamos como base el número real a, a  0, razonamos de la misma manera y obtenemos:



En general, para un número real a cualquiera, a  0 y m  N, n  N, se tiene que:



Si 

El resultado es un exponente natural, pero no tiene la misma base a, sino su inverso:

.

Es decir: 

De otra manera: 

De donde, 

Para todo número real a, a  0 y n  N, se tiene que:



El cociente de dos potencias de exponente entero y la misma base es una potencia de la misma base, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

Si a  R, a  0, m  Z y n  Z, entonces:



**Ejemplos:**

Simplifiquemos las siguientes divisiones:

1. 
2. 
3. 
4. 

### Practica lo aprendido

1. Simplificar los siguientes números reales:
2. 
3. 
4. , a  Z.
5. 
6. 
7. 
8. , donde z  R, z  0.
9. , donde x  R, x  0.
10. , donde b  R, b 0.
11. , donde a  R, a  0.
12. Determinar los enunciados verdaderos y los falsos, justificando la respuesta en cada caso:
13. 
14. 
15. 
16. 
17. 
18.  es un factor de 
19. 
20. 
21. Si , entonces n = 8
22. Si , entonces n = -2.

## POTENCIAS DE EXPONENTE 0

Consideremos que a  R, a  0. Si queremos calcular el valor del cociente  donde n es un número entero distinto de cero, podemos proceder de dos maneras:

1. 
2.  (por ser el cociente de un número real por sí mismo).

Para que no existan contradicciones, establecemos la igualdad entre la expresiones 1 y 2 y definimos , cualquiera sea el número real a, con a  0.

Para todo a  R, a  0, .

Para nosotros carecerá de sentido el símbolo .

## POTENCIA DE UNA POTENCIA

Para calcular  , procedemos así:



El resultado  es otra potencia, la base es la misma pero el nuevo exponente es el producto de los exponentes dados.

Si deseamos calcular  el exponente - 3 es un entero negativo, lo transformamos en exponente positivo así:



De donde:



Si a es un número real, m y n son números enteros, entonces:



**Ejemplo:**

Simplifiquemos las siguientes potencias:

1. 
2. 
3. 

## POTENCIA DE UN PRODUCTO

¿Cuál es el significado de , donde a y b son números reales? Un número al cubo significa que tomamos ese número tres veces como factor:



Por las propiedades conmutativa y asociativa de los números reales:



De modo que: 

En general, si a y b son números naturales y n es un entero positivo, entonces:



Por las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación en R, tenemos que:



Y



Si a, b son dos números reales cualesquiera y n un nú­mero entero, entonces:



**Ejemplo:**

Simplifiquemos las siguientes expresiones:

1. 
2. 
3. 

## POTENCIA DE UN COCIENTE

El cociente de dos números reales es un número real, el cual se obtiene multiplicando el dividendo por el inverso del divisor.

Si a y b son dos números reales con b  0, resulta que:

 Para todo entero n

La potencia  con n  Z, a y b números reales, b 0, es el cociente, 

**Ejemplo:**

Simplifiquemos

1. 
2.  ¿Por qué?
3. ; o también 

### Practica lo aprendido

1. Simplificar cada una de las expresiones y escribir la respuesta utilizando solamente exponentes positivos (suponer que ningún número real variable toma el valor 0):
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 

## NOTACIÓN CIENTÍFICA

Los números reales que se presentan en los problemas de la vida diaria son frecuentemente, muy grandes o muy pequeños: el tamaño de la población de una ciudad, un país o un continente; el presupuesto de una nación y su distribución; la deuda externa; los capitales bancarios; la distancia entre los planetas; la masa del electrón y del protón; la longitud de onda de cada uno de los colores del espectro lumínico; etc. La población de una ciudad de más de tres millones de habitantes, puede darse como 3273010, que se obtiene sumando los datos, recopilados por las personas encargadas de realizar el censo. Es cierto que el número ha cambiado mientras se realiza el censo y es probable que 3273000 sea correcto sólo con la aproximación de un millar. Por razón no hay riesgo en redondear el número original como: 3273000. En realidad, en la mayoría de los casos bastaría decir que la ion de la ciudad es "alrededor de los tres millones doscientos mil” habitantes lo que escribiríamos así:

Población de la ciudad  3200000 habitantes.

El símbolo  se lee: aproximadamente igual a.

El diámetro de un átomo de plata tiene una longitud aproximada de 0,00000000025 metros.

Hay otras maneras de escribir números, las cuales presentan notables ventajas. Así:

* 3200000 = 32 X 100000 = 32 X  = 3,2 X 
* 

A veces la notación científica se llama también notación de las potencias de diez o exponencial de­cimal.

Estas formas de escribir números muy grandes o muy pequeños, nos permiten, igualmente, comparar dos números escritos de esa forma.

Así vemos que  es menor que  sin necesidad de contar el número de cifras.

Al trabajar simultáneamente con números grandes o con números pequeños, podemos simplificar notablemente los cálculos. Comúnmente, en el trabajo de los científicos e ingenieros se representan los números de esta manera:

(Un número entre 1 y 10) X (una potencia de 10)

En tales casos, el número está escrito en notación científica. Si el número es una potencia de 10, entonces el primer factor es un 1 y se acostumbra no escribirlo. Así:





Un número real está expresado en notación científica si se escribe como el producto de una expresión decimal entre 1 y 10 y una potencia adecuada de 10. Si el número es una potencia de 10, el primer factor es 1 y no es necesario escribirlo.

**Ejemplos:**

Escribamos los números en notación científica:

1. 535
2. 4837,63
3. 768531
4. 3435000000
5. 937,25

Solución

1. 
2. 4837,63 = 4,83763 X 1000 = 
3. 768531 = 7,68531 X 100000 = 7,68531 
4. 937,25 = 9,3725 X 100 = 9,3725 X 

Consideremos la potencia  y dividámosla por 10. Obtenemos  pues:



De la misma forma: , , 

Los exponentes decrecen en una unidad cada vez. Si dividimos 10 por 10 sabemos que el resultado es 1; si los exponentes decrecen según el modelo anterior, de unidad en unidad, el siguiente exponente será 0. Por esta razón es conveniente definir  como 1.

Al dividir nuevamente por 10, obtenemos el número racional decimal . Si se sigue el modelo de decrecimiento de los exponentes, debemos esperar que el exponente siguiente sea una unidad menor que 0, el cual sabemos que es el entero negativo -1. Parece razonable que escribamos  para representar el número racional .

Si dividimos  por 10 se obtiene:



Continuando con el modelo de decrecimiento de los exponentes, el nuevo exponente deberá ser una unidad menor que -1, es decir -2. De esto, definimos  como una representación de:



Si n es un entero positivo, establecemos la siguiente definición:

 (n veces el 10 como factor).



Para n = 0, definimos .

Estas definiciones nos permiten escribir las potencias de 10 así:

Tabla 1: Potencias de 10

| 100000 | 10000 | 1000 | 100 | 10 | 1 | 1/10 | 1/100 | 1/1000 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 10 a la 5 | 10 a la 4 | 10 a la 3 | 10 a la 2 | 10 a la 1 | 10 a la 0 | 10 a la -1 | 10 a la -2 | 10 a la -3 |

Consideremos, entonces, un número real escrito en forma decimal. Así:





Donde  y  son las expresiones en notación científica de 0,3 y 0,0005. También:



Análogamente:



Cuando escribimos en notación científica un número positivo que 1, vemos que su exponente siempre es un entero negativo.

**Ejemplos:**

.

Escribamos los números en notación científica:

1. 0,00001
2. 6,25
3. 0,48
4. 0,00342

Solución

1. 
2. 
3. 
4. 

### Practica lo aprendido

1. Escribir en notación científica cada uno de los siguientes números después de efectuar las operaciones:
2. 4000000000
3. 
4. 
5. 9000000 X 5000
6. 
7. 25000 X 186000000
8. 0,093
9. 0,00053
10. 0,000000000023
11. Escribir en notación decimal cada uno de los siguientes números
12. 
13. 
14. 
15. 
16. 

## OPERACIONES INVERSAS DE LA POTENCIACIÓN EN R

¿Cuál es el número que elevado al cuadrado es igual a 25? Eso equivale a buscar un número real a que verifique la igualdad  = 25.

¿A qué exponente hay que elevar el número real 2 para obtener 1671? equivale a buscar el número real b que verifique la igualdad = 16.

La potenciación en R tiene dos operaciones inversas: una para hallar la base de la potencia indicada y otra para hallar el exponente. Esto se debe a que la potenciación no es conmutativa; el orden de los términos en , por ejemplo, es decisivo. No es lo mismo  que .

## RADICACION

Tratemos inicialmente de resolver el problema de hallar un número real de modo que , es decir, un número que elevado al cuadrado sea igual a 25. Ese número lo llamamos raíz cuadrada de 25 y lo escribimos



En el conjunto N sólo existe el número 5, pero en Z, Q y R hay números que son 5 y - 5.

Si b es un número real positivo y , entonces a es una raíz cuadrada de b. Si a es una raíz cuadrada de b también lo es -a. La raíz cuadrada positiva de b la denotamos por  y la raíz cuadrada negativa de b por .

Un número real negativo -b, donde b  R y b > 0, tiene raíces cuadradas reales, puesto que para todo número real a se cumple que . Sin embargo, siempre es posible hallar raíces cúbicas de números negativos, porque el cubo de un número real negativo es un real negativo.

Si b es un número real cualquiera y n > 1 es un número natural, se llama raíz real de índice n del número b o simplemente raíz real n-ésima de b, a todo número real a que verifique la igualdad:



La expresión "raíz n -ésima de n” suele ser remplazada por el símbolo .

En el símbolo  distinguimos tres elementos:

1. El número natural n > 1 que se llama índice de la raíz.
2. El símbolo que se llama signo radical.
3. Una expresión b dentro del signo radical que se llama radicando.

La expresión  es un radical de índice n.

Si a es un número real que es la raíz n-ésima de un número real b, es decir, a = , entonces por la definición de raíz n-ésima de b se tiene que:



La potencia de un radical, cuando el exponente es igual al índice, es el radicando.

Si b es un número real positivo, entonces se conviene habitualmente en suprimir el índice 2 de

 y escribir simplemente .

**Ejemplos:**

1.  porque  = 64 y  = 64
2.  porque  = 8, 
3. Porque ,
4. . En general, 

En el ejemplo anterior encontramos las raíces de algunos números real observamos que:

1. Si el índice del radical es impar, entonces la raíz tiene el mismo signo que el radicando.
2. Si el índice del radical es par, hay una raíz positiva y otra negativa
3. Dado un radical , no siempre existe un número real a tal que .

## RADICALES SEMEJANTES

Se llaman radicales semejantes los que tienen el mismo índice mismo radicando.

**Ejemplos:**

1. Los radicales  y  son radicales semejantes. Los números 5 y - 3 son los coeficientes de ambos radicales.
2. Los radicales  y  no son radicales semejantes, puesto que tienen índices diferentes.
3. Los radicales  y  no son radicales semejantes puesto que tienen radicandos diferentes.
4. Los radicales y  no son radicales semejantes.

Consideremos el número real . Si aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en R tenemos que:



Si tenemos el número real , donde r  R y a, b  R entonces:



La suma de radicales semejantes es otro radical, semejante.

### Practica lo aprendido

1. Hallar el número representado por cada una de las siguientes opresiones:
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 
12. Encontrar los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
13. 
14. 
15. 

## RAÍCES DE PRODUCTOS

Consideremos el producto de dos radicales con el mismo índice, como ejemplo  y  y encontremos su producto . ¿Podríamos transformar este producto en una forma más sencilla?

Si examinamos la expresión  podemos llegar a una conclusión acerca de 

Tendremos que:

.

Así, pues,  debe ser una raíz cuadrada de 6.



Si a, b, x y y son números reales positivos tales que:

 y , entonces: , , ,  y concluimos ; es decir, .

Análogamente, puede establecerse la siguiente propiedad que es válida para todo radical de índice n:

Para todo a, b , 

Si n es un entero positivo mayor que 1, entonces  para todo número real positivo a. ¿Por qué?

**Ejemplo:**

1. Simplifiquemos el radical 

Solución



O también:



Cuando simplificamos un radical lo reducimos a su expresión más simple, es decir, cuando los factores del radicando tienen un exponente menor que el índice.

1. Efectuemos las siguientes operaciones con radicales:
2. 
3. 
4. 

Solución:

1. 
2. 
3. 

## RAÍCES DE COCIENTES

Consideremos el radical, . Igual que con el radical de un producto:



En  hemos extraído la raíz del dividendo y también la raíz del divisor. Así:



Si a y b son números reales tales que a > 0 y b > 0, entonces



Como en la multiplicación, la igualdad anterior es válida para todos los radicales, sea cual fuere el índice.

Si a, b  R, a  0, b > O y n es un entero positivo, entonces:



Para hallar la raíz n-ésima de un cociente, se extrae la raíz del dividendo y del divisor y después se efectúa la división.

**Ejemplo:**

Simplifiquemos las siguientes expresiones con radicales:

1. 
2. 
3. 
4. 

**Solución:**

1. 
2. 
3. 
4. 

## RACIONALIZACIÓN

Con frecuencia aparecen cocientes de números reales como:

* 
* 
* 

cuyos denominadores son una o varias raíces cuadradas indicadas.

Como es más sencillo operar con cocientes sin raíces en el divisor, pueden reducirse aquellas a otros cocientes equivalentes cuyos divisores contengan radicales.

Consideremos el caso en el cual el divisor no contiene sumas de radicales.

Consideremos la expresión  y tratemos de eliminar el radical  del divisor:



Infórmate:

Desde la época del ocaso del mundo griego, aproximadamente hacia el año 300 después de Cristo, hasta el resurgimiento de la mo­derna civilización europea (el año 1500), el progreso de los matemá­ticos y de la ciencia fue esporádico y más bien poco.

Hemos multiplicado el dividendo y el divisor por  y hemos eliminado el radical del denominador, es decir, se ha racionalizado el denominador.

Cuando el divisor está representado por una suma o una diferencia de radicales, amplificamos por el número conjugado del divisor.

Consideremos:



El divisor es .

El número conjugado del divisor () es (). Efectuando la operación tenemos:





Se multiplica por el número conjugado del divisor porque el producto de (a + b)(a- b) tiene como resultado: , lo cual permite la eliminación del signo radical.

**Ejemplo:**

Racionalicemos el denominador en cada una de las siguientes expresiones:

1. 
2. 
3. 

**Solución**

1. 
2. 
3. 

### Practica lo aprendido

1. Escribir en forma más simple cada uno de los siguientes radicales:
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 
13. 
14. 
15. 
16. 
17. 
18. 
19. 
20. 
21. 
22. Simplificar cada una de las siguientes expresiones radicales
23. 
24. 
25. 
26. 
27. En cada uno de los siguientes ejercicios, racionalizar el denominador:

## POTENCIAS Y RAÍCES RADICALES

Consideremos las potencias  y . Al aplicarle a cada una de ellas la definición de potencia, resulta:

*  =  =  = 
*  =  =  =  =  = 

Si el radical es de índice n  N, n > 1y m  Z, entonces , donde a  .

Para elevar un radical a una potencia, se deja el mismo índice y se eleva el radicando a esa potencia.

A dice a 6: “Todos mis lápices son negros menos dos; todos mis lápi­ces son rojos, menos dos; todos son azules, menos dos. ¿Cuántos lápices tengo de cada color?”

**Ejemplo:**

Simplifiquemos las siguientes expresiones:

1. 
2. 

**Solución**

1.  =  =  =  = 5a
2.  =  =  =  =  =  = 

Si al radical  le extraemos la raíz cúbica y llamamos bala raíz cúbica de , tenemos:



Concluimos:



En el cual: 

Para extraer una raíz a un radical, se multiplica el índice del radical por el índice de la raíz.



**Ejemplo:**

Observemos el resultado de las siguientes operaciones:

* 
* 
* 
* 
* 

### Practica lo aprendido

1. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar el resultado (si es posible)
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 

## LOGARITMACIÓN

Cuando a es un número real dado y n  Z, obtenemos un número real b llamado potencia n-ésima de a:

 = b.

Cuando conocemos la potencia n-ésima de un número real positivo y queremos determinar ese número real, lo hacemos mediante la operación radicación, una de las operaciones inversas de la potenciación:



La radicación resuelve el problema de calcular la base cuando se conocen la potencia y el exponente.

La otra operación inversa de la potenciación es la que permite calcular el exponente, conociendo la potencia y la base.

Si a, b  , b  1 y x es una indeterminada o variable individual, la proposición abierta  se convierte en proposición verdadera para un único número real. La solución se llama logaritmo de a en base b, y se indica:



Se llama logaritmo de un número a   en la base b  , donde b  1, y se indica , al exponente al que hay que elevar la base b para obtener como resultado el número a (siempre que tal exponente exista y sea único en R).

La expresión:  significa que r es el único número real que verifica .

 con r único.

El gran cúmulo de cálculos reque­ridos por la astronomía y otras disciplinas preocupaba a los cien­tíficos del siglo XVI. El escocés John Napier, o barón Neper de Merchiostum (1550-1617} inventó el método de los logaritmos neperianos o naturales para sim­plificar enormemente los cálculos numéricos al descubrir que se pueden "multiplicar dos números sumando otros dos números".

Un millar de cubos unitarios son colocados juntos formando un cubo más grande de arista 10 unidades. Si se pinta el cubo formado y luego se separan nuevamente los cubos originales, ¿cuántos de éstos tie­nen al menos una cara pintada?

**Ejemplos:**

1. , puesto que .

, pues .

, pues .

, puesto que .

 pues 

Para agilizar los cálculos, ahorrar tiempo en cierto tipo de problemas y practicar algoritmos, es conveniente utilizar a veces la calculadora En el caso de calcular logaritmos, de números reales positivos, utilizamos la calculadora para encontrar los resultados aproximados.

1. Encontremos mediante aproximaciones superiores e inferiores los números reales:
2. 
3. 

**Solución**

1. Iog10 200 es un número real x, tal que 10\* = 200.

Si x = 2, = 100 y si x = 3, entonces  = 1000.

Por tanto,

 <  < , lo cual nos indica que el valor de x está entre 2 y 3 y que se aproxima más a .

Seguimos aproximando y hallamos que:

*   125,89254
*   158,48932
*  199,52623
*   251,1886

De estos valores el que más se aproxima es .

Seguimos aproximando y hallamos:

*   199,52623,
*   204,17379

Seguimos aproximando y calculamos:

*  199,52623
*  199,98619

Se puede elegir como el valor buscado de je más aproximado 2.301 y según como vayan quedando los resultados, se pueden seguir haciendo cálculos para hallar un número racional cada vez más aproximado con 4. 5, 6, etc., cifras decimales, al número real .

1. Como lo hicimos al resolver a, utilizamos la calculadora para encontrar un valor aproximado, con tres decimales, de .

Puesto que  = 64 < 100 < 128 = , entonces 6 <  < 7.

Con ayuda de la calculadora encontramos los valores de , con p tomando valores entre 6 y 7 con una décima de diferencia:

*   68,59350
*   73,51669
*   78,79324
*   84,44850
*   90,50966
*   97,00586
*   103,.96831
*   111,43047

De estos valores de p, el que más se aproxima a  es 6,6. Por tanto: 6,6 <  < 6,7.

Seguimos aproximando y hallamos:

*   99,73306
*   100,42676

que nos muestra 6,64 <  < 6,65.

Continuamos el proceso de aproximación en milésimas, diezmilésimas y cienmilésimas y obtenemos:

*   99,94067
*   100,0099.

Podemos elegir como el valor buscado de , el número 6.643.

### Practica lo aprendido

1. Expresar cada una de las siguientes potencias en forma de logaritmo:
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. Expresar cada una de las siguientes raíces en forma de logaritmo:
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 
13. Expresar cada uno de los siguientes logaritmos en forma de potencias:
14. 
15. 
16. 
17. 
18. 
19. Utilizando la calculadora, encontrar aproximaciones racionales con cuatro cifras decimales de los siguientes logaritmos:
20. 
21. 
22. 

A comienzos del siglo XVI, el cé­lebre astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630) enunció sus tres famosas leyes sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Lo hizo basado en los resultados de nu­merosas y precisas mediciones efectuadas por el danés Ticho Brahe (1546-1601) y después de muchos cálculos incesantes.

# TEMA2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

**Expresión algebraica**

Una expresión algebraica es una forma simbólica que emplea constantes, variables, operaciones matemáticas y signos de agrupación como paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves { }.

Una expresión algebraica no es más que la representación de una o varias operaciones o relaciones matemáticas de números, considerados éstos en forma general, Mientras no se diga algo diferente, las variables representan números reales.

**Ejemplo:**

1. Son ejemplos de expresiones algebraicas:
2. 10xyz
3. 3x + 6y
4. 
5. 
6. Si a, b y c son variables, las siguientes expresiones verbales se pueden escribir como expresiones algebraicas:

* El doble de a: 2a
* El triple de la suma de a y c: 3(a + c)
* La suma de los cuadrados de a, b y c: 
* El cuadrado de la suma de a, b y c: 
* El producto de a por el cuadrado de b: 
* El doble de la diferencia de los cuadrados de a y c: 2( a – c)
* El cubo de a, disminuido en 3: 
* El cubo de a disminuido en 3: 

Como se puede observar una buena simbolización de una expresión verbal, tiene que ver con el uso de los signos de puntuación.

**Término:**

Es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios no separados entre sí por los símbolos + o -.

**Ejemplo:**

* La expresión 3x + 5y tiene dos términos.
* - 5xy tiene un término.
*  tiene tres
* 8x + 5y - 3y - 5y tiene cuatro términos.

**Clasificación de las expresiones algebraicas:**

Las expresiones algebraicas se pueden clasificar según el número de términos que la conforman, así:

* Monomio: expresión algebraica de un solo término.
* Binomio: expresión algebraica de dos términos.
* Trinomio: expresión algebraica de tres términos.
* Polinomio: expresión algebraica con más de un término.

El grado de un término es la suma de los exponentes de las variables. El grado un polinomio es el que posee el término con el mayor grado.

Los elementos de un término son cuatro: el signo, el coeficiente la parte literal y el grado.

Si en un término no aparece el signo -, se asume que es positivo; si no aparece coeficiente se entiende que es 1 y si no tiene parte literal, entonces el término es una constante.

**Ejemplo:**

La expresión ; tiene signo positivo, coeficiente es 1, su parte literal es  y su grado cuatro.

**Términos semejantes**

Dos o más términos con la misma parte literal se denominan términos semejantes.

Los términos semejantes pueden sumarse o restarse reduciéndose a un sólo térmi­no. Para ello se suman o restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

**Ejemplos:**

1. 5x + 6x= 11x
2. 
3. 5c + 4m – 6c + 7m = (5c – 6c) + (4m + 7m) = -c + 11m

## VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

El valor numérico de un polinomio, o en general de una expresión algebraica, es el resultado que se obtiene al sustituir la parte literal por valores numéricos dados y después las operaciones indicadas.

**Ejemplo:**

1. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión:

, si x = 3, y = 4.

**Solución:**

Al remplazar los valores dados en la expresión se tiene:



= 36 – 144 = -108

1. Si a =  encontrar el valor numérico de:
2. 
3. 
4. 

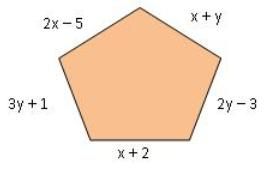
**Solución:**

1. 
2. 
3. 

### Practica lo aprendido

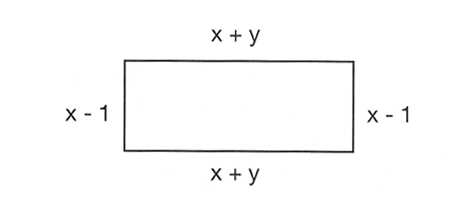
1. Establece si cada par de expresiones algebraicas corresponde a términos semejantes:
2. ; 
3. ; 
4. ; 2xy
5. ; 
6. ; 
7. ; 
8. Escribe 5 términos semejantes a cada una de las siguientes expresiones:
9. 
10. 
11. 
12. 
13. 6xyz
14. -6xyz
15. Di si cada expresión es un monomio, un binomio, un trinomio o un polinomio o ninguno de ellos:
16. 
17. 
18. 
19. 
20. 
21. 
22. 
23. 4 + y
24. 
25. 
26. 
27. 
28. -43
29. 
30. 
31. Identifica el grado de cada término y el grado del polinomio:
32. 2x – 4
33. -3x + 6
34. 
35. 
36. 
37. 
38. 
39. 
40. 
41. 
42. 
43. 
44. Reduce los términos semejantes:
45. 2x - 5x
46. 
47. 
48. 
49. 
50. 
51. 
52. X – 9x
53. 
54. 
55. 
56. 
57. 
58. 
59. 
60. 
61. 
62. 
63. 
64. 
65. 
66. 
67. 
68. 
69. Escribe un polinomio para el perímetro de estas figuras. Simplifica el polinomio que te resulte reduciendo los términos semejantes.

Imagen 14: Pentágono

1. 

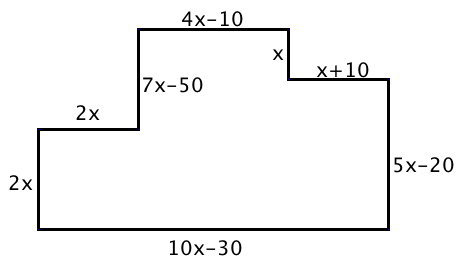
**Descripción Imagen:** Pentágono con binomios de medida en sus lados, dados como x + 2, 3y + 1, 2x – 5, x + y, 2y – 3.

Imagen 15: Rectángulo

1. 

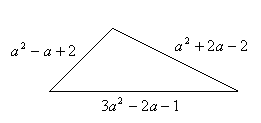
**Descripción Imagen:** Rectángulo con medidas de sus lados dadas en los binomios x + y, x -1.

Imagen 16: Figura Plana

1. 

**Descripción Imagen:** Figura de 8 lados cado uno con medida: 2x, 10x – 30, 5x – 20, x + 10, x, 4x – 10, 7x – 50, 2x.

Imagen 17: Triángulo

1. 

**Descripción Imagen:** Triángulos con medida de sus lados dada por los polinomios a al cuadrado, - a + 2, 3 a al cuadrado – 2 a – 1, a al cuadrado + 2 a – 2.

1. Identifica los términos de cada una de las siguientes expresiones. Para cada término en­cuentra el coeficiente:
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 
13. 
14. 
15. 
16. 
17. 
18. 
19. 
20. 
21. Determina el signo, coeficiente, parte literal y grado de cada una de las siguientes expresiones
22. 
23. 3x
24. 
25. 
26. -2x
27. 
28. 
29. 
30. 
31. 
32. 
33. 
34. Ab
35. 
36. Interpreta el siguiente enunciado y exprésalo haciendo uso del lenguaje algebraico:

*“La suma de un número y 2 se multiplica por ese número y después se resta 3 al resultado".*

1. Interpreta y expresa cada frase mediante una expresión algebraica:
2. El número que es cinco veces un número x.
3. El número que equivale al doble de y más tres.
4. El número que es cinco más que x.
5. El número que es ocho menos que y.
6. El número correspondiente a la mitad de la suma de x y y.
7. Simboliza cada una de las operaciones efectuadas entre dos números que puedes llamar m y n:
8. Su suma.
9. El cuadrado de su suma.
10. Su diferencia.
11. El cubo de su diferencia.
12. Su producto.
13. La diferencia de sus cubos.
14. Su cociente.
15. La raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados.
16. La suma de sus cuadrados.
17. El doble de su producto.
18. Efectúa las operaciones indicadas y luego simplifica cada expresión:
19. 8 + 3 X 4
20. 
21. 
22. 
23. 
24. 
25. Evalúa cada expresión algebraica si t = 6, x = 3, y = 4, z = 5:
26. 2(x + 7)
27. 5y - 3
28. (18 - 4)x
29. 7z + 8
30. Z(t – y)
31. 4 (xz + 3y)
32. 9xyz – t
33. 5(3y – 4x)
34. 6y – 2xy
35. Xyz – 4z
36. (yy + z)z
37. 
38. 
39. 
40. 
41. 2 [x + 4 (y + z)]
42. 3[z + 5(2y - x)]
43. [(5y + 6z) – 36] + y
44. 2t - [7z + (y + x)]
45. 5z + 8x - 3y
46. 
47. Evalúa la expresión algebraica con los valores de las variables:
48. Perímetro de un paralelogramo:

2(a+b) si a = 7,5 y b = 19,5.

1. Perímetro de un trapecio isósceles:

2a + b + c si a = 16, b = 20 y c = 48.

1. Área de un trapecio:

h ( b +c ) ) si h = 12, b = 16 y c = 48.

1. Área de un círculo:

s r = 28.

1. Área total de un prisma:

2(lw + wh + lh) si l = 14, w = 12 y h = 10.

1. Completa la siguiente tabla. Remplaza las letras x y y por los valores indicados:

Tabla 2: Relación de Valores de x, y

| x | y | X al cuadrado | 6x | 3xy | x + y | 2x – y |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 3 |  |  |  |  |  |
| -1 | 4 |  |  |  |  |  |
| 5 | -2 |  |  |  |  |  |
| -4 | 6 |  |  |  |  |  |
| 0 | 5 |  |  |  |  |  |

1. Remplaza los valores indicados en las siguientes expresiones algebraicas y determina si la igualdad se satisface:
2. 5x – 2y = 23, x = 7, y = -6
3. 3a – 5b = 21, a = 2, b = -3
4. 3a - 4b = 11 a = , b = -4
5. 3m - 2n = 6 m = , n = 
6. 4m - 5n = 9 m = 1, n = -1
7. 2x + 3y = 13 x = 5,y = 1
8. 3a - 2b = 13 a = 3, b = -2
9. 5x - 4y = 9 x = -3, y = -6
10.  x = 4, y = -1
11. Encuentra tres pares de valores para x y y que satisfagan cada una de las siguientes igualdades:
12. 2x + y = 6
13. 5x + y = 7
14. 3x + 7y = 7
15. x + 3y = 9
16. 3x + 2y = 8
17. x + 2y = 9
18. 2x + 5y = 10
19. 3x + y = 7
20. 5xy = 30
21. 3xy = 9
22. Xy = 12
23. xy + 7 = 23
24. xy = 4
25. (x + 2)y = 5
26. (4 - x) = 4
27. (x + 6) = 7

### Prepárate para el ICFES

Se sabe que la relación entre la escala de grados centígrados C y la de grados Fahrenheit F, viene dada por las fórmulas (1) y (2) que se muestran a continuación:

1. 
2. 
3. Si una señora está cocinando una torta en el horno a una temperatura de 350° C, enton­ces, la temperatura del horno en grados Fahrenheit es:
4. 600
5. 598
6. 632
7. 662
8. Si al medir la temperatura de cierto líquido, en un termómetro en grados Fahrenheit, marca 32, esto significa que en grados centígrados, la temperatura del líquido es:
9. – 32
10. 32
11. 0
12. No se puede determinar.
13. ¿Se puede afirmar que la temperatura en grados centígrados es directamente proporcio­nal a la temperatura en grados Fahrenheit? Explica tu respuesta.

**CURIOSIDADES MATEMÁTICAS**

Algunas personas tienen una notable facilidad para efectuar mental y muy rápidamente cálculos complicados. Aunque en la era de las calculadoras elec­trónicas esta destreza no resulte muy útil, es fascinante.

Un célebre calculista "relámpago" fue el inglés George Bidder, nacido en 1806. Siendo niño, su padre le llevó por todo el país, dando exhibiciones de su formidable capacidad de cálculo mental. Aunque el padre ganaba mucho dinero con las exhibiciones de su hijo, se dejó finalmente persuadir para que George fuera a la universidad. George se hizo ingeniero; proyectó diversos ferrocarriles en Londres. George era capaz de traducir los números a figuras. Por ejemplo, el número 984 lo visualizaba como una formación rectangular de puntos: 24 hileras de 41 puntos.

## OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

Realiza las siguientes operaciones:

1. 18  3 + 6
2. 15 + 3  4 – 8
3. 16 – ( - 12) – 10
4. 9 – ( 8 + 6 – 5)
5. 12 – ( 5 – 14 + 6)
6. (8 – 11) – (4 - 6)
7. {8 + 7 (4 + 5)}
8. {(3 – 5) (10 - 2)}
9. 23 + {5  (8 + 7) - 4}

**Polinomio de una variable:**

Un polinomio de una variable es una expresión algebraica de la forma:



Donde n es un número positivo.

**Ejemplos:**

* 
* 
* r(a)
* 

Son polinomios de una variable.

**Polinomio de dos o más variables**

Un polinomio de dos o más variables es una expresión algebraica cuyos términos constan de más de una variable.

**Ejemplos:**

* 
* 
* 

Son polinomios de dos variables.

**Polinomio ordenado**

Un polinomio está ordenado en relación con una variable cuando los términos están ordenados según el grado.

**Ejemplo:**

1. El polinomio:



está ordenado en forma ascendente por las po­tencias de x.

1. El polinomio:



está ordenado en forma descendente.

Si un polinomio tiene más de una variable, se puede ordenar con respecto a una de ellas.

1. Ordenar el polinomio:



1. Descendentemente con respecto a x:



1. Ascendentemente con respecto a x:



1. Descendentemente con respecto a y:



1. Ascendentemente con respecto a y:



## ADICIÓN DE POLINOMIOS

Para hallar la suma de dos polinomios, se deben sumar los términos semejantes.

**Ejemplo:**

1. Dados los polinomios:





Hallar p(x) + q(x).

**Solución:**

Primero ordenamos los polinomios en forma decreciente y ubicamos los términos semejantes uno bajo el otro, como se observa a continuación:







1. Dados los polinomios





Sumar p(x) + q(x).

**Solución**

Como ya están ordenados los polinomios en forma decreciente, ubicamos los términos semejantes uno bajo el otro. En el caso de que los polinomios que se van a sumar no estén completos, es decir, no contengan todos los exponentes sucesivos respec­to a una variable, se dejan los

espacios correspondientes, y se suma tal como se indicó en

el ejemplo anterior:

Imagen 18: Proceso de suma de polinomios.

Alineación de términos semejantes para desarrollo del proceso de suma de polinomios.


**Descripción Imagen:** Alineación de los polinomios P(x) y q(x) según sus términos semejantes para la suma de sus coeficientes.

## SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Para efectuar la sustracción: p(x) - q(x), se escribe el inverso aditivo del sustraendo que se obtiene cambiando los signos de sus términos. Luego se sigue con el proce­dimiento indicado para la suma.

**Ejemplo**

1. Hallar: p(a) - q(a) si:





Solución

Se ordenan los polinomios y se halla el inverso aditivo del sustraendo; luego se realiza la suma correspondiente:

Imagen 19: Resta de polinomios.

proceso vertical de resta de polinomios


**Descripción Imagen:** Alineación de polinomios p(a) y q(a) para proceso de resta, se alinean de acuerdo a sus términos semejantes,

**USO DE PARÉNTESIS**

En álgebra los paréntesis se usan para agrupar términos y separar operaciones.

Para suprimirlos correctamente se deben tener en cuenta las siguientes tres reglas:

* **Regla 1.** Si un paréntesis es precedido por un signo positivo, éste se puede supri­mir sin variar los signos de los términos que están dentro del paréntesis.

**Ejemplos:**

7a + (- 5a + 6c) - 8c = 7a - 5a + 6c - 8c = 2a - 2c

13x + (2x-7xy) + xy = 13x +2x-7xy + xy = 15x-6xy

* **Regla 2.** Si un paréntesis es precedido por un signo negativo, se puede suprimir cambiando los signos de los términos que están dentro del paréntesis.

**Ejemplos:**

12a - ( 5a - 8b) + 3b = 12a - 5a + 8b + 36 = 7a + 11b

3x - (-2y + 5x) + 7y = 3x + 2y - 5x + 7y = -2x + 9y

* **Regla 3.** Si una expresión algebraica tiene términos agrupados entre paréntesis y ellos a su vez se encuentran dentro de otros paréntesis, se pueden resolver las ope­raciones que anteceden a los paréntesis desde adentro hacia fuera.

**Ejemplo:**

13x - {-2x+ [3x-(-x + y) + 2y]-3y}

= 13x - {-2x+[3x +x-y + 2y]-3y}

= 13x - {-2x+[4x + y]-3y}

= 13x - {-2x+ 4x + y -3y}

= 13x - {2x - 2y}

= 13x - 2x + 2y

=11x + 2y

### Practica lo aprendido

1. Considera los siguientes polinomios:









Calcula:

1. p(a) + q(a)
2. r(a) + t(a)
3. q(a) + t(a)
4. p(a) + t(a)+ q(a)
5. p(a) + r(a)
6. p(a) + q(a) + r(a)
7. r(a) + t(a) + q(a)
8. p(a) + q(a) + r(a) + r(a)
9. q(a) + p(a)
10. q(a) + t(a)
11. q(a) + r(a)
12. p(a) + r(a) + q(a)
13. p(a) + t(a)
14. p(a) + r(a) + t(a)
15. t(a) + t(a) + q(a)
16. p(a) + p(a) + r(a)
17. 5p(a) – 3q(a)
18. 3p(a) + 5t(a)
19. Considera los siguientes polinomios:









Calcula:

1. p(x) + q(x)
2. r(x) + p(x)
3. r(x) + q(x)
4. r(x) + p(x) + q(x)
5. q(x) + t(x)
6. t(x) + p(x) + q(x)
7. p(x) + p(x) + p(x)
8. t(x) + t(x) + t(x)
9. q(x) + p(x)
10. p(x) + t(x)
11. t(x) + r(x)
12. p(x) + r(x) + t(x)
13. p(x)+ p(x)
14. p(x) + p(x) + p(x)
15. t(x) + t(x) + q(x)
16. q(x) + t(x)
17. 12p(x) – 4t(x)
18. 20q(x) + 3r(x)
19. Considera los siguientes polinomios y calcula las sumas:







1. p (x ,y) + q (x ,y) + q (x ,y) + p (x ,y)
2. p(x, y) + p(x, y)
3. p(x, y) + r(x, y)
4. [r(x, y) + p(x, y)] + q(x, y)
5. q(x, y) + r(x, y)
6. [p(x, y) + q(x, y)] + [p(x, y) + r(x, y)]
7. p(x, y) + q(x, y) + r(x, y)
8. {[ g(x, y) + r(x, y) ] + p(x, y) } + r(x,y)
9. Escribe la operación correspondiente a cada enunciado y halla la resta:
10. De  resta .
11. Resta  de .
12. Resta  de 
13. De 107 u v resta 109 u v.
14. De resta 
15. Resta -16xy de - 83xy.
16. Resta  de .
17. De 89tv resta -48tv.
18. De  resta .
19. Resta  de .
20. Resta los siguientes monomios semejantes:
21. De  resta .
22. Resta  de .
23. Resta  de .
24. Resta  de .
25. De  resta 
26. De  resta 
27. Resta  de 
28. Resta  de .
29. De  resta .
30. Resta - 9 vw de - 12 vw
31. Considera los siguientes polinomios:









Calcula:

1. p(a) - t(a)
2. p(a) + q(a)
3. q(a) - r(a)
4. t(a) - p(a)
5. r(a) - t(a)
6. -p(a) + q(a) - t(a)
7. –[-(p(a) + t(a))] + r(a)
8. –{q(a) + [t(a) - r(a)]} + p(a)
9. Dados los polinomios p(z), q(z) y r(z), calcula las adiciones y sustracciones indicadas:







1. [p(z) + q(z)] - [r(z) - p(z)]
2. {p(z) - [-r(z) + (q(z) - p(z)) + p(z)]}
3. -p(z) - [-p(z) + p(z)] + p(z)]
4. -p(z) – [-p(z) + p(z)] + p(z)
5. [p(z) + q(z)] – r(z)
6. [p(z) - r(z)] + q(z)
7. p(z) – [q(z) - r(z)]
8. [p(z) – q(z)] – [r(z) – q(z)]
9. [p(z) + q(z)] - [r(z) + q(z)]
10. Considera los polinomios:







1. Verifica que al efectuar p(x) + q(x) y q(x) + p(x) se obtiene el mismo resultado.
2. Verifica que p(x) + [q(x) + r(x)] es igual a [p(x) + q(x)] + r(x).
3. Comprueba que la suma de cada polinomio con su respectivo opuesto aditivo da como resul­tado el polinomio nulo.
4. ¿Qué puedes decir del resultado de la comparación de [q(x)- r(x)] y [r(x) - q(x)]?
5. Realiza las siguientes operaciones:
6. De la diferencia entre (3a - 2b) y (2a - b), sustrae la suma de (8a - b) y (5a - b).
7. De la suma de (5m - 3n - 8) y (4m - 2n + 8), sustrae la diferencia entre (m + n + 1) y (m – n - 2)
8. Sustrae la suma de (2p + 3q + 5r ) y (4p -3q - 6r) a la suma de (2p + q - r ) y (3p - 4q - 5r)
9. Sustrae (3a – 2 - 5c + 8) a la diferencia entre (3a -2b + 5c - 9) y (4a + b – c - 1).
10. Suprime los signos de agrupación y luego reduce los términos semejantes:
11. 2a + {a - (b - c)}
12. - {- (- a)} - {(- a)} + [- { - b + c} - {- (- b)}]
13. 12mn - {5mn - 2m + (2mn - 5mn)}
14. a + {(- 2c) - (3b + 3c) - (a + b + c)}
15. - (x + y) + {3x - 2y- (3x - 4y)}
16. (- r + s) + {- (s- r + 3r) - (5r- 9s)}
17. 6c - [- (3a - 5b) - {a - 2c + (3c – 8b)}]
18. a - [- 7 ab + {- b + (- a + 3ab - 2b)}]
19. –(3x + y) – [2x + {-x + (2y-5)}-(y+6)]
20. 2a + {a - (2b - c) + (c – 3b)} - {- (a + b)
21. - {(4bc - 9a) + (3bc + 3c) -(a + bc + c)}
22. –r + {3s - (s - r) + 8r } - (-8r + 11s)}
23. - [ - (- 7x - 12y) - {- 3x - 2y + (3x - 11y)}]
24. (- a + 3ab - 2b) + {a + [ - 7ab - {- 5b + 8}]
25. -[2x - { -x - (2y + 5)} - (5y - 6)] + (9x - y)
26. - (- 2r - 5s) - {- (5s - 9r) - (- 11r + 29s)}
27. Introduce los tres últimos términos de cada una de las siguientes expresiones dentro de un paréntesis precedido del signo -:
28. 5a + 3ab - 2bx + cz
29. -a + 5v-2c + 4x
30. m + 3 mn - 24n + 1
31. - a + 3ab + 2b + c
32. 2m - 5n - 3x + 9y
33. - 2b - c - bc – a
34. 5xy - 6 + 9x – y
35. a - 2bc + 3c - 8b
36. 9x + 12y – 3 – y
37. 10yz - 3y - 8x + 10y
38. 9xy + 2 - 7x - 8y
39. -7w - 12y - 3x - 2w

**CURIOSIDADES MATEMÁTICAS**

Es en el álgebra egipcia que aparece, por prime­ra vez el simbolismo matemático. En el papiro de Rhind se representa el signo + con dos pier­nas caminando de derecha a izquierda (la mane­ra en que escribían los egipcios), y el signo - con una par de piernas yendo en sentido opuesto.

## PRODUCTO ENTRE POLINOMIOS

**Potenciación de números reales**

Para todo número real a y n natural:

 (n veces)

**Propiedades de la potenciación:**

* para todo a0
* 
* 
* 
* 
* 
* , a0

Simplifica las siguientes expresiones algebraicas de acuerdo con las propiedades de las potencias:

1. 20 X 4 X 2 X 1 X 32 X 
2. 

**MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS**

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tengan los facto­res.

**Ejemplo:**

A partir de los monomios:





Calcular el producto:

p(x) X q(x)

**Solución:**

Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación en los reales y las de la potenciación, se multiplican los coeficientes y las partes literales entre sí:



**MULTIPLICACIÓN DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO**

Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio aplicando la propiedad distributiva.

Sea el monomio



y el polinomio:

.

Calcular su producto.

**Solución:**





La operación también suele disponerse así:





\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_



**MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS**

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término de uno de ellos por cada de los términos del otro; luego, se reducen los términos semejantes.

**Ejemplos:**

1. Sean los polinomios:

p(x) = 3x + 5



Calcular el pro­ducto p(x) X q(x):



**Solución**

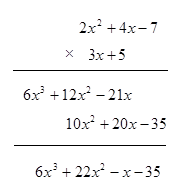






Observa cómo puede efectuarse esta multiplicación de otra forma:

Imagen 20: Proceso de multiplicación de polinomios.



**Descripción Imagen:** Multiplicación entre p(x) y q(x) con los subproductos correspondientes.

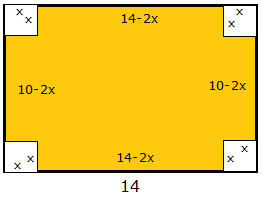
1. Considerar una pieza rectangular de cartón de 14 cm de largo y 10 cm de ancho. Cortar cuadrados iguales en cada una de las esquinas y construir una caja abierta doblando los lados. ¿Cuál es el volumen de la caja en función de x, siendo x la medida del lado de los cuadrados recortados?

Imagen 21: Pieza Rectángular

Pieza Rectangular

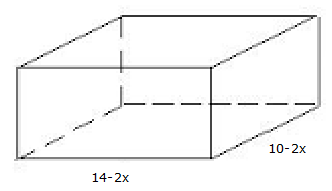

**Descripción Imagen:** Rectángulo con medida de los lados indicada en 14 y 10 unidades.

Imagen 22: Pieza Rectangular con cuadrados de lado x recortados en cada esquina.



**Descripción Imagen:** Rectángulo con medida en cada lado dada por 10 – 2x, 14 - 2x, dado que cada se quitó un cuadrado de lado x.

Imagen 23: Caja Abierta



**Descripción Imagen:** Caja abierta con medida del largo y ancho de la base dados por los binomios 14 – 2x y 10 – 2x y altura x.

**Solución:**

El volumen de la caja está dado por la expresión algebraica:

V(x) = (14 - 2x)(10 - 2x)x

Este polinomio se puede usar para encontrar el volumen de una caja asignándole valores particulares a x.

Así por ejemplo, si x = 3 cm, el volumen de la caja es:

(14 - 2 x 3) x (10 - 2 x 3) x 3 = (14 - 6) x (10 - 6) x 3 = 96 

**TRIÁNGULO DE PASCAL:**

Al desarrollar potencias de cualquier binomio de la forma , se pueden sacar las siguientes conclusiones:

1. El número de términos del resultado, es siempre uno más que el exponente del binomio.
2. El exponente del primero y el último término del desarrollo, es igual al del binomio.
3. El exponente del primer término del binomio disminuye de uno en uno en cada término hasta llegar a cero; en cambio, el del segundo término aumenta de uno en uno empezando en cero y terminando en la potencia del binomio.
4. Todos los términos de son positivos.

Si el binomio es , los signos se alternan comenzando el primer térmi­no con +.

1. El triángulo que se forma con los coeficientes de cada uno de los términos que se obtienen al desarrollar la potencia del cualquier binomio del tipo (x + a) se denomina triángulo de Pascal:

Imagen 24: Triángulo de Pascal

Dibujo del triángulo de Pascal hasta el nivel 6.


**Descripción Imagen:** Triángulo formados por números de la punta hacia debajo, separados por ; de cada nivel, de la siguiente manera: 1; 1, 1; 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1; 1, 4, 6, 4, 1; 1, 5, 10, 10, 5, 1; 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.









**Ejemplo**

1. Desarrollar el binomio:



**Solución:**

****

1. Hallar el desarrollo de



Solución:

Teniendo en cuenta las observaciones hechas sobre el triángulo de Pascal, para este caso particular se tiene que:

* El número de términos en el desarrollo de la expresión es 6.
* El exponente del primero y último término del desarrollo es 5, el mismo del binomio:

**Primer término:** 

**Último término:** 

* El exponente del primer término del binomio disminuye en uno en cada término hasta llegar a cero; en cambio, el del segundo término aumenta de uno en uno empezando en cero y terminando en la potencia del binomio. Además los coeficientes son los que aparecen en frente de  en el triángulo de Pascal.

**Segundo término: **

**Tercer término:** 

Cuarto término: 

Quinto término: 

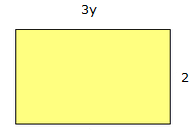
En resumen:



### Practica lo aprendido

1. Escribe cada expresión en forma exponencial:
2. x. x. x. x. x
3. c. c. 3. c
4. -3. x. 2. X
5. m. m. m
6. -6. z. z. z
7. 7. n. (-2). N
8. 4. t. t. t
9. y. y. (-5)
10. (-2) (-2) x x
11. Encuentra una expresión algebraica que represente el área de cada rectángulo:

Imagen 25: Ejercicio a.

1. 

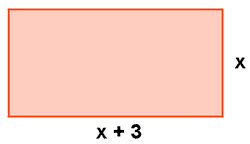
**Descripción Imagen:** Rectángulo con medidas en los lados de valor 3y, 2.

Imagen 26: Ejercicio b.

1. Rectángulo con lados de medida dada en binomio.
   

**Descripción imagen:** Rectángulo de medidas 2x + 5 y 3x + 9 en su largo y ancho.

Imagen 27: Ejercicio C.

1. 

**Descripción imagen:** Rectángulo de medidas x + 3 y x en su largo y ancho.

1. Aplica la propiedad de los exponentes y luego simplifica las siguientes expresiones:
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 
13. 
14. 
15. 
16. 
17. 
18. 
19. 
20. Utiliza las propiedades de la potenciación para simplificar las siguientes expresiones:
21. 
22. 
23. 
24. 
25. 
26. 
27. 
28. 
29. 
30. 
31. 
32. 
33. 
34. 
35. 
36. 
37. 
38. Completa la siguiente tabla:

Tabla 3: Valor polinómico.

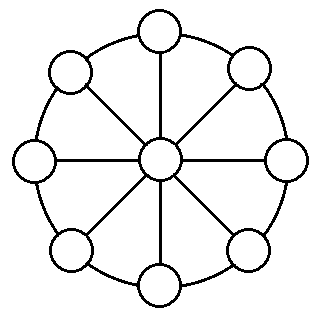
|  | x | xy |  | X – y | 2x + y | X + y |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| X |  |  |  |  |  |  |
| xy |  |  |  |  |  |  |

1. Distribuye los monomios:

, , , , , , , 

en la rueda de la imagen. Un monomio debe ocupar el centro del círculo y los demás en los extremos de cada diámetro, de manera que los tres monomios de cada fila, tengan como pro­ducto el monomio .

Imagen 28: Círculo



**Descripción imagen:** Círculo formado por 8 círculos equidistantes y uno en el centro, conectados todos entre si por segmentos circulares, para ubicar números.

1. Calcula los siguientes productos:
2. 7(5a + b)
3. 
4. 
5. (x + 5y)
6. (3a + 5b) (-4)
7. 6xy (xy + y)
8. (2a – 4b) ab
9. 
10. (x + y)
11. (2y + 6)y
12. 4(2a + 5b)
13. ab (4a - b)
14. 
15. 
16. (c + 5d)(-15)
17. Contesta las preguntas:
18. Al multiplicar dos polinomios de grado n, ¿cuál es el grado del producto?
19. Al multiplicar dos polinomios de grado m y n, ¿cuál es el grado del producto?
20. El grado del producto de dos polinomios es m + n. Si uno de los factores tiene grado m, ¿cuál  
    es el grado del otro factor?
21. Con los polinomios:

p(x) = 2x + 3

q(x) = x+ 4

r(x) = 3x -2

Resuelve las operaciones:

1. p(x) x q(x)
2. p(x) x [q(x) + r(x)]
3. q(x) x r(x) - p(x) x r(x)
4. q(x) x p(x)
5. p(x) x r(x)
6. [q(x) - p(x)] [ r(x) + p(x)]
7. Considera los polinomios:

m(x) = 6

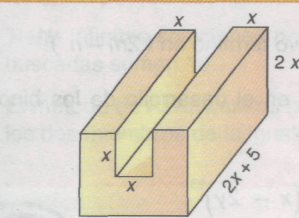
n(x) = 2 + 

t(x) = 6x – 2

w(x) = -2

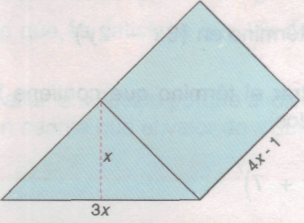
1. m(x) x n(x)
2. [w(x) + m(x)] x n(x)
3. n(x) x t(x) x m(x)
4. m(x) x n(x) + m(x)
5. [w(x) - m(x)] x t(x)
6. [n(x) - t(x) x w(x)] + m(x)
7. [t(x) - n(x)] x w(x)
8. [t(x) - n(x) + w(x)] x m(x)
9. [m(x) x n(x)] x t(x)
10. Escribe la operación en lenguaje matemático y el factor adecuado, de modo que el producto sea el que se indica:
11. Por 6 = 6b
12. 2 por = 2 a al cuadrado
13. Por menos x = x al cuadrado
14. Por 4a = 8 a al cuadrado
15. 4ax por = 8 a x al cuadrado.
16. ax por = 3ax
17. Por 8x = 0
18. 11c por = -132 c al cuadrado
19. 3x por = - 18 n x y
20. Por 9xy = 27 x al cuadrado y al cuadrado m
21. 5m al cuadrado n por = 15 m al cubo n al cubo.
22. Por c a la 4 d = 22 c a la 4 d
23. 12am por = 36 a b m
24. Escribe un polinomio que represente el volumen de cada figura:

Imagen 29: Ejercicio a.

1. 

**Descripción Imagen:** Cubo rectángular de alto 3x, profundidad 2x + 5, al cual se le ha extriado en el centro un cubo rectángular de cara cuadrada con medida x, y profundidad equivalente a la rectángulo original.

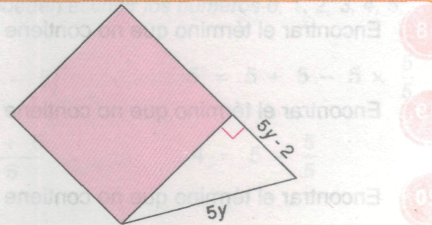
Imagen 30: Ejercicio b.

1. 

**Descripción Imagen:** Piramide de base rectángular, con largo determinado por el polinomio 3x, profundidad 4x – 1, y altura del triángulo de valor x.

1. Escribe un polinomio para calcular el área del cuadrado:

Imagen 31: Lado cuadrado.



**Descripción Imagen:** Figura formada por el volumen de un triángulo rectángulo, la hipotenusa del triángulo mide 5y, y el cateto adyacente mide 5y – 2, la profundidad de la figura es cuadrado, de lado desconocido, este corresponde a la medida del otro cateto.

1. Calcula:
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 
13. 
14. 
15. 
16. 
17. 
18. El capital Cf de un depósito a interés i% se determina por la fórmula



donde n es el número de años. Determina el capital final de una persona que depositó $ 100000 en un banco, por un período de cuatro años, a un interés anual del 15%.

1. Encuentra el término solicitado:
2. El tercer término en 
3. El cuarto término en 
4. El quinto término en 
5. El sexto término en 
6. El tercer término en 
7. El quinto término en 
8. El octavo término en 
9. El sexto término en .
10. Escribir en lenguaje simbólico y encontrar el término que contiene la potencia dada en el desarrollo de los binomios indicados:
11. Quinta potencia de h en (h + 7) a la 7
12. Novena potencia de y en (x - 2y) a la 13
13. Quinta potencia de t en (t - 4) a la 10
14. Sexta potencia de w en (u + 3w) a la 11
15. Encontrar el término que no contiene a x en el desarrollo de la potencia:



1. Encontrar el término que no contiene a z en el desarrollo:



### Prepárate para el ICFES

AI-Khuarizmi escribía:

"He partido diez en dos porciones. He multiplicado una de las dos porciones por la otra. pues de esto, he multiplicado una de las dos por sí misma, y el producto de la multiplicación por sí misma, es cuatro veces el producto de una por la otra".

Resolución en notación moderna:

Sean x y 10 - x las dos porciones; el producto de ellas es:

X(10 – x) = (10 x menos x elevado a la 2) 

El producto de x por sí misma es x elevado a la  2 .

La ecuación queda determinada de la siguiente forma:

x elevado a la 2 igual a 4 [x(10 menos x) ]

x elevado a la 2 igual a 40 x menos x elevado a la 2 

Usando el procedimiento de AI-Khuarizmi , se suma 4 x elevado a la 2 en ambos lados:

5 x elevado a la 2 igual a 40 x

Dividiendo por 5x se obtiene: x = 8

1. Las porciones en las que se divide 10 de acuerdo con el método de Al - Kharizmi son:
2. 9 y 1
3. 8 y 2
4. 6 y 4
5. 10 y 0
6. Con respecto a la solución del anterior problema se puede establecer que:
7. No es única porque existe otro valor para el cual el problema tiene solución.
8. Es única porque es imposible encontrar otro par de valores que satisfaga la ecuación.
9. Tiene infinitas soluciones porque es suficiente que se satisfaga que las dos porciones  
   buscadas sumen 10.
10. El método de AI-Khwarizmí no es fiable para hallar la solución porque al dividir entre 5x  
    los dos miembros de la igualdad no se tiene en cuenta que el valor de x puede ser 0.

## DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Aplicando la propiedad para dividir potencias de la misma base:

a elevado a la n sobre a elevado a la m igual a a elevado a la n menos m 

Simplifica las siguientes expresiones:

1. 3 elevado a la 5 sobre 3 elevado a la 3 
2. x elevado a la 6 sobre x elevado a la 3 
3. 27 y elevado a la 3 sobre 15 y elevado a la 2 
4. a elevado a la 2 b elevado a la 4 sobre a b elevado a la 2 
5. 60 x elevado a la 3 y elevado a la 4 sobre 25 x elevado a la 4 y elevado a la 3 
6. 25 m n elevado a la  3 sobre menos 15 m elevado a la 2  n elevado a la 2 
7. 3( a mas b  elevado a la 2) sobre 9 (a mas b elevado a la 2) 

**Monomio entre monomio**

Para dividir dos monomios se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor; a la parte literal le aplicamos la propiedad para dividir potencias de la

la misma base.

**Ejemplo:**

Dividir 4 a elevado a la 3 b elevado a la 2  entre -2ab

**Solución:**

**(4 a elevado a la 3 b elevado a la 2) dividido (menos 2 a b) igual a 4 a elevado a la 3 b elevado a la 2 sobre menos 2 a b igual a menos 2 a elevado a la 2 b **

**Polinomio entre monomio**

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio, separando los cocientes parciales con sus propios signos.

**Ejemplo:**

Dividir:

3 a elevado a la 3 menos 6 a elevado a la 2 b mas 9 a b elevado a la 2  entre 3a

**Solución:**

(3 a elevado a la 3 menos 6 a elevado a la 2 b mas 9 a b elevado a la 2) sobre (3 a ) igual a (3 a elevado a la 3) sobre (3 a) menos (6 a elevado a la 2 b) sobre (3a) mas (9 a b elevado a la 2) sobre (3 a) igual a a elevado a la 2 menos 2 a b elevado a la 2 mas 3 b elevado a la 2 

**Polinomio entre polinomio**

Para dividir dos polinomios, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Ordenar los polinomios en orden decreciente.
2. Dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicar este primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor y el resultado restarlo del dividendo, así se obtiene un dividendo par­cial.
4. Continuar a partir de este dividendo parcial, conforme se indicó en los pasos 2 y 3, hasta obtener un residuo de menor exponente que el divisor.
5. Si el residuo es CERO la división es EXACTA.

**Ejemplo:**

Dividir:

(63 x elevado a la 3 menos 86 x elevado a la 2 mas 3 x mas 20) dividido ( x menos 1) 

**Solución:**

Imagen 32: Proceso de División de Polinomios

Proceso de división de polinomios.


**Descripción Imagen:** Pasos en el proceso de división de dos polinomios, los cuales se dan de manera eliminatoria al término de mayor grado en el dividendo.

Como se observa en el ejemplo, si el polinomio no es completo se dejan los espacios correspondientes a las potencias de las variables faltantes.

**División sintética**

Las divisiones de polinomios cuyo divisor es de la forma (x ± a) se pueden realizar aplicando la división sintética o método de Ruffini-Horner.

**Procedimiento:**

Para determinar si un polinomio admite divisores de la forma (x ± a) procedemos de la siguiente forma:

1. Se hallan los divisores o factores del término independiente.
2. Se hallan los factores del coeficiente del término de mayor grado del polinomio.
3. Los posibles valores de a, lo constituyen los cocientes resultantes de dividir los factores del término independiente entre cada uno de los factores hallados en el paso 2.
4. (x ± a) es divisor del polinomio si al calcular el polinomio en el valor a, éste se anula, (es decir, se hace igual a cero).

**Ejemplo:**

Establecer si el siguiente polinomio 2 x elevado a la 3 menos x elevado a la 2 mas 6 x menos 3  admite divisores de la forma (x ± a)

**Solución**

1. Divisores de 3 : 1, -1, 3 y -3
2. Divisores de 2: 1 , -1 , 2 y -2
3. Posibles divisores de a

igual a {1, un medio , 3 , 3 medios , menos 3 , menos 3 medios }

1. Es claro que no necesariamente todos estos valores de a, sirven. Sólo funcionan aquellos  
   que anulen al polinomio, es decir que al remplazarlos en el polinomio arrojen como resulta­  
   do 0:

P(1) igual a 2(1) elevado a la 3 menos (1) elevado a la 2 mas 6 (1) menos 3 = 4 

P(menos 1) igual a 2 (menos 1) elevado a la 3 menos ( menos 1) elevado a la 2 mas 6 (mènos 1) menos 3 igual a menos 12 

P(1 medio) igual a 2(1 medio) elevado a la 3 menos (1 medio) elevado a la 2 mas 6 (1 medio) menos 3 igual a 0 

P ( menos 1 medio) igual a 2( menos 1 medio) elevado a la 3 menos (menos 1 medio) elevado a la 2 mas 6(menos 1 medio) menos 3 igual a menos 13 medios 

El único divisor de la forma (x ± a) que admite el polinomio 2 x elevado a la 3 menos x elevado a la 2 mas 6 x menos 3 es ( x menos 1 medio) 

**Ejemplo:**

Dividir:

(menos 2 x elevado a la 2 mas x elevado a la 3 mas 2 menos x) dividido ( x mas 1) 

**Solución:**

* Se ordena el dividendo en forma decreciente:

x elevado a la 3 menos 2 x elevado a la 2  menos x mas 2 

* Se escriben en fila los coeficientes del divi­dendo, el signo de división y el opuesto del  
  término independiente del divisor:

1 -2 -1 2 menos 1

* Los coeficientes del cociente se obtienen de la siguiente forma:

**Primer término:** Es el mismo coeficiente del pri­mer término del dividendo.

Se escribe debajo de una raya que se traza.

**Segundo término:** Es la suma del producto del primer término del cociente y divisor, con el se­gundo coeficiente del dividendo:

(1 x (-1)) + (-2)

Se escribe al lado del 1.

Se continúa el proceso hasta obtener el residuo:

Imagen 33: Proceso de División Sintética

Coeficientes de los polinomios para el proceso de división sintética.


**Descripción Imagen:** Alineación de los números 1, -2, -1, 2 línea -1 sobre línea, debajo del -2 en adelante se encuentran los números -1, 3, -2. Debajo de estos números una línea horizontal y organizados de derecha a izquierda debajo del -2 los números 0, 2, -3, 1. El 0 está indicado como reisudo.

Cociente: x elevado a la 2 menos 3 x mas 2 

### Practica lo aprendido

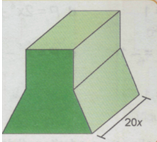
1. Completa en la siguiente tabla:

Tabla 4: División entre polinomios

| Dividido | 2 | 2y | 3 x al cuadrado | 6xy |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| -4x |  |  |  |  |
| 5 x al cubo y |  |  |  |  |
| Xy |  |  |  |  |
| 30 x al cubo y + 6 x al cuadrado y |  |  |  |  |

1. Realiza las siguientes divisiones:
2. (menos 24) dividido 8 
3. (menos 63) dividido ( menos 7) 
4. (menos 5 a elevado a la 2) divido (menos a) 
5. (14 a elevado a la 3 b elevado a la 4) dividido a elevado a la 3 b elevado a la 4 
6. ( menos a elevado a la 3 b elevado a la 4 c ) dividido (menos a b) 
7. (54 x elevado a la 2 y elevado a la 2 z elevado a la 3) dividido ( menos 6 x y elevado a la 2 z elevado a la 3) 
8. (menos 5 m elevado a la 2 n) dividido (m elevado a la 2 n)
9. (menos 8 a elevado a la 2 x elevado a la 3) dividido ( menos 8 a elevado a la 2 x elevado a la 3) 
10. (menos xy elevado a la 2) dividido 2 y 
11. (5 x elevado a la 4 y elevado a la 5) dividido (menos 6 x elevado a la 4 y) 
12. (menos a elevado a la 8 b elevado a la 9 c elevado a la 4) dividido 8 c elevado a la 4 
13. (16 m elevado a la 6 n elevado a la 4) dividido (menos 5 n elevado a la 3) 
14. (menos 108 a elevado a la 7 b elevado a la 6 c elevado a la 8) dividido ( menos 20 b elevado a la 6 c elevado a la 8 ) 
15. (menos 2 m elevado a la 2 n elevado a la 6) dividido ( menos 3 m n elevado a la 6)
16. Divide:
17. ( x elevado a la 3 menos 4 x elevado a la 2 mas x) dividido x 
18. (3 x elevado a la 2 y elevado a la 3 menos 5 a  elevado a la 2 x elevado a la 4) dividido ( menos 3 x elevado a la 2) 
19. (3 a elevado a la 3 menos 5 a b elevado a la 2 menos 6 a elevado a la 2 b elevado a la 3) dividido (menos 2 a) 
20. (a elevado a la 2 menos a b) dividido a b
21. (4 x elevado a la  8 menos 10 x elevado a la  6 menos 5 x elevado a la 4) dividido 2 x elevado a la 3 
22. (6 m elevado a la 3 menos 8 m elevado a la 2 n mas 20 m n elevado a la 2) dividido ( menos 2 m ) 
23. (6 a elevado a la  8 b elevado a la 8 menos 3 a elevado a la  6 b elevado a la  6 menos a elevado a la 2 b elevado a la 3 ) dividido 3 a elevado a la  2 b elevado a la 3 
24. (x elevado a la 4 menos 5 x elevado a la 3 menos 10 x elevado a la 2 mas 15 x) dividido ( menos 5 x) 
25. (8 m elevado a la  9 n elevado a la 2 menos 10 m elevado a la 7 n  elevado a la 4 menos 20 m elevado a la 5 n elevado a la 6 mas 12 m elevado a la 3 n elevado a la 3) dividido (m menos n) 
26. (a elevado a la x mas a elevado a la m menos 1) dividido a elevado a la 2 
27. (1 tercio a elevado a la 3 menos 3 quintos a elevado a la 2 mas 1 cuarto a) dividido menos 3 quintos 
28. (1 medio x elevado a la 2 menos 2 tercios x) dividido 2 tercios x 
29. Divide la primera expresión entre la segunda:
30. 6 a elevado a la m b elevado a la  n entre 2 b elevado a la 3
31. 5 x elevado a la  m mas 6 x elevado a la  m mas 1  entre x elevado a la  menos 1 
32. a elevado a la  m b elevado a la  n mas a elevado a la  m menos 1 b elevado a la  n mas 2  menos a  elevado a la  m menos 2 b elevado a la n mas 4 entre a elevado a la  2 b elevado a la  4  
33. a elevado a la  3 b elevado a la 5 mas a elevado a la 2 b elevado a la 4  entre a elevado a la 2 b elevado a la 5 
34. Realiza las siguientes divisiones; determina y escribe el cociente y residuo en cada caso:
35. ( m elevado a la  11 menos 2 m elevado a la 7 menos 8 m elevado a la 4 mas 16) dividido ( m elevado a la 4 menos 2)  
36. (x elevado a la 2 mas 4 x mas 3) dividido  (x + 3)
37. (5 a elevado a la 3 ma 5 a elevado a la 3 menos 3 a elevado a la 2 menos 3) dividido ( a elevado a la 2 mas 1) 
38. (15 m elevado a la 4 mas 15 m elevado a la 3 mas 8 m elevado a la 2 mas 8 m) dividido (m mas 1) 
39. (21 X elevado a la 3 menos 20 x elevado a la 2 menos 6 x mas 3) dividido ( 3 x menos 5) 
40. (10 x p elevado a la  3 menos 21 x elevado a la 2 p elevado a la 2 mas 2 x elevado a la 3 p) dividido (p - 2x)
41. ( a elevado a la 2 menos 2 a menos 8) dividido (a - 4)
42. (6 m elevado a la  2  + 13m + 6) dividido  (2m + 3)
43. ( 4 p elevado a la 2  - 8p + 16) dividido (2p -- 4)
44. (15 a elevado a la 2  + 12 - 28a) dividido  (5a - 6)
45. (2 b elevado a la  4 menos 9 b menos 7 mas 3 b elevado a la 3) dividido (2 b mas b elevado a la  2 menos 1) 
46. (13 y elevado a la  3 mas 15 y mas 6 y elevado a la 4 menos 6) dividido ( 2 menos y mas y elevado a la  2)
47. (x elevado a la 4 menos y elevado a la 4) dividido  (x - y)
48. (7 x elevado a la 3 menos 1 mas 2 x mas 2 x elevado a la 4 ) dividido (3 x mas x  elevado a la 2 menos 1) 
49. ( x elevado a la 5 mas y elevado a la 5) dividido (x - y)
50. (16 p elevado a la 5 menos 40 p menos p elevado a la 3 mas 16) dividido ( p mas 4 p elevado a la 2 menos 6) 
51. (2 a elevado a la  2 mas a menos 3) dividido ( 3 a menos 3) 
52. ( x elevado a la  7 mas y elevado a la  7)  dividido (x + y)
53. ( y elevado a la 12 menos 8 y elevado a la 6 mas 16) dividido ( y elevado a la 6 menos 4) 
54. EI volumen del ladrillo, que tiene la forma de la siguiente imagen, es 60 x elevado a la 3 mas 28 x elevado a la 2 . La longitud es 20x. Encuentra el área de la región sombreada:

Imagen 34: Bloque 1.



**Descripción Imagen:** Bloque de profundidad con medida 20x, la cara frontal está sombreada.

1. El volumen de un bloque de concreto de la forma de la imagen, es 40 x elevado a la 3 mas 50 x elevado a la 2 . La altura es 10x. Encuentra el área de la región sombreada:

Imagen 35: Bloque 2

Bloque con cara sombreado para cálculo de área superficial.


**Descripción Imagen:** Bloque con altura de valor 10x y tapa sombreada.

1. Calcula las siguientes divisiones en forma sintética. Escribe el cociente y el residuo:
2. ( x elevado a la 5 menos 32) dividido (x -- 2)
3. (x elevado a la 5 menos 32) dividido (x + 2)
4. ( x elevado a la 3 menos 8) dividido  (x -- 2)
5. ( y elevado a la 4 menos 6) dividido  (y + 2)
6. ( x elevado a la 2 menos 2 x mas 1) dividido (x - 2)
7. ( x elevado a la 3 menos 27) dividido  (x - 3)
8. ( y elevado a la 2 mas y mas 1) dividido  (y - 1)
9. ( y elevado a la 2 menos y mas 1) dividido (y + 1)
10. (41 x elevado a la 3 menos 11 elevado a la 2  mas 47 x menos 32) dividido (x -- 3)
11. (12 x elevado a la 4 menos 3  elevado a la 2 mas 5 x menos 2 x elevado a la 3 mas 8) dividido (x –3)
12. 20 x elevado a la 5 menos 2 x elevado a la 3 mas 3x menos 10) dividido ( x + 1)
13. (41 x elevado a la 3 menos 20 x elevado a la 2 mas 7 x menos 31) dividido (x -- 2)
14. ( 12  elevado a la 5 mas 11 x mas 13 x elevado a la 4 mas 10 x elevado a la 2 menos 10) dividido(x – 1)
15. ( x elevado a la  4 menos 13 x elevado a la 2 mas 12 x menos 30 ) dividido (x - 2)
16. (3 z elevado a la 4 menos 36 z elevado a la 3 mas 81 z elevado a la 2 menos 729 ) dividido (z – 9)
17. Emplea división sintética para hallar Q y R tales que P = D x Q + R. Calcular P(a) en cada caso:
18. P = x elevado a la 5 mas x mas 5 , D = x – 1; a = 1
19. P = x elevado a la  5 menos x menos 5 ; D = x+1; a = -1
20. P = 2 x elevado a la 4 mas 4 x elevado a la 3 menos 16 x elevado a la 2 mas 3 ; D = x - 2; a = 2
21. P = x elevado a la 4 menos x elevado a la 3 mas 14 x elevado a la 2 mas 9 x mas 5 ; D = x-4 ; a = -2
22. P =x elevado a la  5 mas x mas 5 ;D = x -1; a=1
23. Establece si los siguientes polinomios admiten divisores de la forma (x ± a):
24. P(x) = x elevado a la 4 mas x elevado a la 3 menos x elevado a la 2 menos 7 x menos 6
25. P(x) = x elevado a la 3 menos 2 x elevado a la 2 menos 5 x mas 6 
26. P(x) = 2 x elevado a la 3 mas 5 x elevado a la 2 menos 9 x mas 3 
27. P(x) = x elevado a la 4 menos 6 x elevado a la 3 mas 3 x elevado a la  2 menos 9 x mas 3  
28. P(x) = x elevado a la  4 menos 6 x elevado a la  3 mas 3 x elevado a la 2 mas 24 x menos 28 
29. P(x) = x elevado a la 3 menos 4 x elevado a la 2 menos 95 x mas 198 
30. P(x) = x elevado a la 5 menos 2 x elevado a la 4 menos 3 x elevado a la 3 mas x elevado a la 2 menos 2 x menos 3 
31. P(x) = 2 x elevado a la 3 mas x elevado a la 2 menos 13 x mas 6 
32. ¿Qué opinas del procedimiento o método de Ruffini-Horner? ¿Es útil? ¿por qué?

# TEMA 3: PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones:
2. (2x + 3y )(2x+3y )
3. (a - 2)elevado a la 5 
4. (3b elevado a la 2  + 2a) (3b elevado a la 2  - 2a)
5. (2x + 5)elevado a la 3
6. Efectúa las siguientes divisiones:
7. (x elevado a la 8 menos y elevado a la 8) sobre (x mas y)
8. m elevado a la 3 igual a n elevado a la 3 sobre m menos n 
9. a elevado a la 6 menos b elevado a la 6 sobre a menos b 

## PRODUCTOS NOTABLES

Se llaman productos notables a aquellos re­sultados de la multiplicación entre dos polino­mios que tienen características especiales.

1. **Multiplicación de dos binomios que tienen un término común.**

**Ejemplo**

Observa cómo se calcula el producto de (x + 5) Y (x + 3):

(x + 5). (x + 3) = x(x + 3) + 5(x + 3)

igual a x elevado a la 2 mas 3 x mas 5 x mas 15

x elevado a la 2 mas (3 mas 5) x mas 15 

igual a x elevado a la 2 mas 8 x mas 15 

Ahora, en términos generales, multipliquemos los binomios (x + a) y (x + b):

(x + a). (x + b) = x (x + b) + a (x + b)

igual a x elevado a la 2 mas a x mas b x mas a b 

igual a x elevado a la 2 mas (a mas b) x mas a b 

Por lo tanto, se puede escribir el producto no­table:

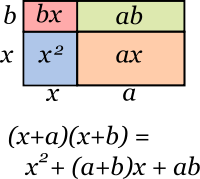
(x + a). (x + b) como x elevado a la 2 mas (a mas b) x mas a b 

"El producto de dos binomios con un térmi­no común, es igual al cuadrado del término común, más la suma de los términos dis­tintos multiplicada por el término común, más el producto de los términos distintos"

**Interpretación geométrica de este producto**

Considerando que (x + a) es el largo de un rec­tángulo y que (x + b) es su ancho:

Imagen 36: Representación Geométrica.



**Descripción Imagen:** Rectángulo de largo repartido en dos partes con medidas x y a, y ancho repartido en dos partes con medidas b y x. Al interior se forman y se marcan con colores los rectángulos de área ab, ax, y bx y el cuadrado de x.

El área de este rectángulo es:

A = A sub 1 mas a sub 2 mas A sub mas a sub 4

Veamos ahora a qué figura geométrica corresponde cada una de las áreas a sub 1, a sub 2, a sub 3, a sub 4, que forman el rectángulo:

* Cuadrado de lado x:

a sub 1 igual a x elevado a la 2 

* Rectángulos de lados b y x:

a sub 2 igual a a por x

* Rectángulos de lados x y a:

a sub 3 igual a a por x 

* Rectángulos de lados b y a:

a sub 4 igual a a por b 

Por lo tanto:

A igual a x elevado a la 2 mas a x mas b x mas a b

igual a x elevado a la 2 mas ( a mas b) x mas a b

1. **Binomio suma" por "binomio diferencia"**

**Ejemplo:**

Observa cómo se calcula el producto de (x + 11) y (x – 11)

(x + 11)(x - 11)

igual a x elevado a la 2 mas (menos 11 mas 11) x menos 121

igual a x elevado a la 2 mas 0 x menos 12 

igual a x elevado a la 2 menos 121 = x2+0x-121 = x2-121

Ahora, en términos generales, multipliquemos el "binomio suma" (x + a) por el "binomio resta" (x - a):

(x + a). (x - a)

x elevado a la 2 mas (menos a mas a) x menos a elevado a la 2 

igual a x elevado a la 2 menos a elevado a la 2 

Por lo tanto, se puede escribir el producto nota­ble:

(x + a). (x - a) igual a x elevado a la 2 menos a elevado a la 2 

“El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos términos, es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término".

**Interpretación geométrica**

**C**onsideremos que (x + a) es el largo de un rec­tángulo y que (x - a) es su ancho:

Imagen 37: Rectángulo con división cuadrada.

Rectángulo formado por rectángulo menor y cuadrado.
 

**Descripción Imagen:** Rectángulo formado por un rectángulo menor de largo x y altura x – a, junto al cuadrado de lado a.

A = a sub 1 mas a sub 2 

Analicemos las figu­ras geométricas que corresponden a las áreas que for­man el rectángulo:

* Rectángulo de lados x y (x - a):

a sub 1 igual a x ( x menos a) igual a a x elevado a la 2 menos a x

* Rectángulo de lados a y (x - a):

A sub 2 igual a a(x menos a) igual a a x menos a elevado a la 2 

A = a sub 1 mas a sub 2 

a igual a x elevado a la 2 menos a x mas a x menos a elevado a la 2 

igual a x elevado a la 2 menos a elevado a la 2 

A Rectángulo = (x + a) (x - a)

1. **Cuadrado de un binomio**

**Ejemplo:**

Observa cómo se calcula el producto de (x + 9) y (x + 9):

(x + 9) (x + 9) = x(x + 9) + 9(x + 9)

igual a x elevado a la 2 mas 9 x mas 9 x mas 81 

igual a x elevado a la 2 mas 18 x mas 81 

En forma general:

(x mas a) elevado a la 2 igual a x elevado a la 2 mas 2 a x mas a elevado a la 2 

Y

(x menos a) elevado a la 2 igual a x elevado a la 2 menos 2 a x mas a elevado a la 2 

1. Cubo de un binomio

**Ejemplo:**

Observa cómo se calcula (x mas 2) elevado a la 3 :

(x elevado a la 2 mas 4 x mas 4) ( x mas 2 ) 

igual a x elevado a la 2 mas 2 x elevado a la 2 mas 4 x elevado a la 2 mas 8 x mas 4 x mas 8 

igual a x elevado a la 2 mas 6 x elevado a la 2 mas 4 x elevado a la 2 mas 12 x mas 8 

Ahora, en términos generales:

(x mas 2) elevado a la 3 igual a (x mas a) elevado a la 2 (x mas a) 

igual ( x elevado a la 2 mas 2 ax mas a elevado a la 2) (x mas a) 

igual a x elevado a la 3 mas a x elevado a la 2 mas 2 a x elevado a la 2 mas 2 a elevado a la 2 x mas a elevado a la 2 x mas a elevado a la 3 

De otra parte,

(x menos a) elevado a la 3 igual a x elevado a la 3 menos 3 a x elevado a la 2 mas 3 a elevado a la 2 x menos a elevado a la 3 

"El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más (o menos) el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, más (o menos) el cubo del segundo término”.

En el siguiente cuadro, se sintetizan los principales productos notables:

* (x mas y) elevado a la 2 igual a x elevado a la 2 mas 2 x y mas y elevado a la 2 
* (x menos y) elevado a la 2 menos x elevado a la 2 menos 2 x y mas y elevado a la 2 
* (x mas y) elevado a la 3 igual a x elevado a la 3 mas 3 a x elevado a la 2 mas 3 a elevado a la 2 x mas aelevado a la 3 
* (x menos y) elevado a la 3 igual a  x elevado a la 3 menos 3 x elevado a la 2 y mas 3 x y elevado a la 2 menos y elevado a la 3 
* (x mas y ) (x menos y) igual a x elevado a la 2 menos y elevado a la 2 
* (x mas a) (x mas b) igual a x elevado a la 2 mas (a mas b) x mas ab

## COCIENTES NOTABLES

Se llama cociente notable a la división entre dos polinomios que tienen características especiales.

En la siguiente lista se sintetizan los cocientes notables más utilizados:

1. a elevado a la n menos b elevado a la n 

Es siempre divisible por a- b, siendo n cualquier número entero, ya sea par o impar.

**Ejemplo:**

(a elevado a la 4 menos b elevado a la 4) sobre (a menos b) igual a a elevado a la 3 mas a elevado a la 2 b mas a b elevado a la 2 mas b elevado a la 3 

( a elevado a la 5 menos b elevado a la 5 ) sobre ( a menos b) igual a a elevado a la 4 mas a elevado a la 3 b mas a elevado a la 2 b elevado a la 2 mas a b elevado a la 3 mas b elevado a la 4 

1. a elevado a la  n menos b elevado a la  n 

Es divisible por a+ b siendo n un número par.

(a elevado a la 4 menos b elevado a la 4) sobre (a mas b) igual a a elevado a la 3 menos a elevado a la 2 b mas a b elevado a la 2 menos b elevado a la 3 

1. a elevado a la  n mas b elevado a la n 

Es divisible por a + b siendo n un número impar:

( a elevado a la  5 menos b elevado a la 5) sobre (a mas b) igual a elevado a la 4 menos a elevado a la 3 b mas a elevado a la 2 b elevado a la 2 menos a b elevado a la 3 mas b elevado a la 4 

1. (a elevado a la n mas b elevado a la  n )nunca es divisible por a+ b ni por a - b siendo n un número par:

Ni a elevado a la  4 mas b elevado a la 4 sobre a mas b 

Ni a elevado a la 4 mas b elevado a la 4 sobre a menos b 

Son exactas.

De los anteriores ejemplos, podemos ver algunas particularidades del cociente obtenido:

1. Tiene tantos términos como lo indica el exponente n.
2. Su grado es una unidad menor que el grado del dividendo.
3. Su primer término tiene exponente n - 1 y en los términos siguientes va decreciendo en 1 el exponente del primer elemento a, mientras aumenta el exponente del segundo elemento b.
4. La suma de los exponentes en cualquier término, es siempre igual a n - 1.

**Ejemplo:**

Sin efectuar la división, escribir el cociente de la división: (16 a elevado a la 4 menos 625) sobre (2a mas 5) 

Solución

(16 a elevado a la 4 menos 625) sobre (2 a mas 5) igual a ((2 a) elevado a la 4 menos 5 elevado a la 4) sobre (2 a mas 5) , por tanto 16 a elevado a la 4 menos 625  siempre es divisible por 2 a mas 5 , dado que su exponente es par (n = 4).

(16 a elevado a la 4 menos 625) sobre (2a mas 5) igual a (2 a) elevado a la 3 (5) elevado a la  0 menos (2 a) elevado a la 2 (5) elevado a la 1 mas (2 a) elevado a la 1 (5) elevado a la 2 menos (2 a ) elevado a la 0 (5) elevado a la 3 

igual a elevado a la 3 menos 20 a elevado a la 2 mas 50 a menos125 

### Practica lo aprendido

1. Calcula aplicando el producto notable de la forma (x + a) (x - b) o (x + a) (x + b):
2. (x - 9)(x - 12)
3. (a - 4)(a - 2)
4. (a + 7)(a - 12)
5. (a + 8)(a + 7)
6. (7ax + 1)(7ax - 6)
7. (5 a elevado a la 2 menos a) ( 5 a elevado a la 2 menos 20) 
8. (6 a elevado a la 3 mas 5) (6 a elevado a la 3 mas 7) 
9. (0 ,5 a elevado a la 2 x elevado a la 7 menos 7) ( 0,5 a elevado a la 2 x elevado a la 7 mas 6) 
10. (x elevado a la  menos 3 y elevado a la  menos 4 mas 5) (x elevado a la menos 4 y elevado a la menos 4 mas 7) 
11. (3 cuartos a elevado a la menos 2 mas 6) (3 cuartos a elevado a la  menos 2 mas 2) 
12. (a elevado a la  menos 3 mas a) (a elevado a la menos 3 mas 7 a)
13. (a elevado a la menos 5 mas b elevado a la 4) ( a elevado a la menos 5 mas 8 b elevado a la 4 )
14. (3 cuartos h mas 7) ( 3 cuartos h menos 3) 
15. (5-2x)(5 + 3x)
16. 213 X 215
17. 170 X 180
18. Resuelve aplicando el cuadrado:
19. (a menos 3) elevado a la 2 
20. (2 a mas 5) elevado a la 2 
21. (3 a mas 4 b) elevado a la  2 
22. (5 a menos 6 b) elevado a la 2 
23. ( 8 a menos 3) elevado a la 2 
24. ( 7 a elevado a la 2 c mas 2) elevado a la 2 
25. (14 a b c menos 2 d) elevado a la 2 
26. (15 a elevado a la 3 mas b elevado a la 4 ) elevado a la 2 
27. (7 x elevado a la 2 mas 6) elevado a la 2 
28. (2 a elevado a la  menos 1 menos 3 a elevado a la 2 ) elevado a la 2 
29. (5 a elevado a la 2 b menos 6 a b elevado a la 3) elevado a la 2  
30. (15 a elevado a la 2 b elevado a la 4 menos 16 a b elevado a la 3 ) elevado a la 2 
31. (2 quintos h elevado a la menos 2 menos 3 septimos k elevado a la menos 4) elevado a la 2 
32. (5 tercios a menos 3 quintos b) elevado a la 2 
33. (0,2 x menos 0,3 y) elevado a la 2 
34. (0,9 a menos 1,3 b) elevado a la 2 
35. ( 3 quintos x elevado a la menos 1 menos 0,7 y ) elevado a la 2 
36. (0,8 r elevado a la menos  menos 10 septimos t elevado a la 2) elevado a la 2 
37. 19 elevado a la 2
38. 27 elevado a la 2 
39. 42 elevado a la 2 
40. 33 elevado a la 2 
41. 103 elevado a la 2 
42. 99 elevado a la 2 
43. Resuelve los siguientes problemas:
44. Un terreno de forma cuadrada mide a metros por lado. Debido a un nuevo loteo, aumentó su frente en d metros y disminuyó en b metros su fondo. Determina la nueva área del terreno.
45. Un triángulo tiene su base y altura de c metros de longitud. Si la altura crece en q metros y la base disminuye en m metros, ¿qué expresión determina la nueva área
46. Desarrolla aplicando el cubo:
47. (2 a mas 1) elevado a la 3 
48. (3 a menos 2) elevado a la 3 
49. (cuatro tercios x menos 3) elevado a la 3 
50. (2 r menos m) elevado a la 3 
51. (t elevado a la 5 mas 2 t) elevado a la 3 
52. (3 cuartos x menos 4 tercios y) elevado a la 3 
53. (a elevado a la  4 menos b elevado a la 4) elevado a la 3 
54. (2 a elevado a la menos 1 mas 3 a) elevado a la 3 
55. (2 quintos a menos 5 medios b) elevado a la 3 
56. (4 a mas 5 b) elevado a la 3 
57. (r elevado a la 2 mas r c elevado a la 2) elevado a la 3 
58. (3 r menos 1 tercio r) elevado a la 3 
59. Escribe cada expresión como el cuadrado de un binomio suma:
60. x elevado a la 2 mas 2 x y elevado a la 2 mas y elevado a la 4 
61. x elevado a la 2 mas 2 x y mas y elevado a la 2 
62. a elevado a la 2 mas 2 ab mas b elevado a la 2 
63. m elevado a la 2 mas 2 m n mas n elevado a la 2 
64. a elevado a la 2 x elevado a la 2 mas 2 a x b y elevado a la 2  mas b elevado a la 2 y elevado a la 2 
65. 9 x elevado a la 2 mas 18 x y elevado a la 2 mas 9 y elevado a la 4 
66. 16 m elevado a la 2 mas 40 m y mas 25 y elevado a la 2 
67. 9 s elevado a la 2 mas 6 s t mas t elevado a la 2 
68. 36 m elevado a la 6 mas 36 m elevado a la 3 n elevado a la 4 mas 9 n elevado a la 8
69. Escribe como el cuadrado de un binomio diferencia:
70. x elevado a la 2  menos 2 x y elevado a la 2 mas y elevado a la 4 
71. x elevado a la 2 menos 2 x y mas y elevado a la 2 
72. a elevado a la 2 menos 2 a b mas b elevado a la 2 
73. m elevado a la  2 menos 2 m n mas n elevado a la 2 
74. a elevado a la 2 x elevado a la 2 menos 2 a x b y mas b elevado a la 2 y elevado a la 2 
75. (100 m elevado a la 2 menos 80 m y elevado a la  2  mas 16 y elevado a la 4
76. 49 a elevado a la 2 b elevado a la 4 menos 14 a b elevado a la 2 c mas c elevado a la 2 
77. 4 n elevado a la 8 menos 4 n elevado a la 4 m elevado a la 3 mas m elevado a la 6
78. 81 g elevado a la 2 menos 18 g z elevado a la 5 mas z 10 
79. Calcula el cuadrado de la suma de los siguientes trinomios. (Sugerencia: asocia los términos de cada expresión).
80. (2 a mas b mas c) elevado a la 2
81. (a menos b menos c) elevado a la 2 
82. ( 2 x mas y mas 2) elevado a la 2 
83. (3a + b - c)elevado a la 2 
84. (3a + 2b + 2c)elevado a la 2 
85. (2 a mas b 1 medio c) elevado a la 2
86. (x mas y mas 1) elevado a la 2
87. ( x elevado a la 2 menos y elevado a la 3 mas z elevado a la 2) elevado a la 2 
88. Asocia convenientemente los siguientes trinomios y calcula:
89. (ax + by + c) (ax - by - c)
90. (x-y + 1)(x + y + 1)
91. (a + b - c) (a + b + c)
92. (2x - 3y + z) (2x + 3y - z)
93. (a - 2b - c) (a + 2b + c)
94. (7- 2x + y) (7 + 2x - y)
95. (x - 1 + y) (x + y + 1)
96. (3 - 4a + b) (3 + 4a - b)
97. (2 - 5 + 3) (2 + 5 - 3)
98. (ax + ay - az) (ax - ay - az)
99. (y  elevado a la 2 + 3x + 7) (x elevado a la 3  -- 3x – 7)
100. (u elevado a la 2- 2u + 4) (u elevado a la 2  + 2u – 4)
101. (y elevado a la 2  - 2y + 9) (y elevado a la 2 - 2y – 9)
102. (u elevado a la 2  - 3u + 16) (u elevado a la  2 - 3u – 16)
103. (2x + 3y + 1) (2x + 3y – 1)
104. (a elevado a la 2 mas b elevado a la 2 mas c elevado a la 2) (a elevado a la 2 menos b elevado a la 2 mas c elevado a la 2) 
105. (a elevado a la 2 menos a x mas x elevado a la 2) ( a elevado a la 2 mas a x mas x elevado a la 2) 
106. Resuelve los siguientes problemas:
107. En un triángulo, la longitud de la base y de la altura es h. Si ambas longitudes disminuyen r metros, determina su nueva área.
108. Un terreno cuadrado de b metros de lado, se transforma en otro de forma rectangular, aumen­tando el frente c metros y disminuyendo el fondo en la misma longitud. Determina su nueva área.
109. Determina el volumen de un cubo cuya arista mide 3a - 2 centímetros, a > 0.
110. Calcula el volumen de una esfera cuyo radio es a + 66 centímetros, b > 0.
111. Dado un cuadrado cuyo lado mide (3a + 2c) centímetros, calcula su perímetro y su área.
112. Comprueba que (a elevado a la 2 mas b elevado a la 2) ( c elevado a la 2 mas d elevado a la 2) igual a ( a c mas b d) elevado a la 2 mas (a d menos b c) elevado a la 2 
113. Resuelve por simple inspección los siguientes productos:
114. (ax + by) (ax - by)
115. (x elevado a la 2 mas y) elevado a la 3
116. (a x mas y) elevado a la 3
117. (x + 5y) (x + 7y)
118. (6x + 8y) (6x - 8y)
119. (mx mas n elevado a la 3 y ) elevado a la 3
120. (x elevado a la 3 mas y elevado a la 2 ) ( x elevado a la 2 menos y elevado a la 2) 
121. (5 x elevado a la 2 mas 7 y) elevado a la 2 
122. (5 x menos 7 y) elevado a la 3
123. (x menos 6 y) elevado a la 2 
124. ( a x mas b y mas c z)  elevado a la 2 
125. (x + y + 1) (x + y - 1)
126. (2x – 5y)(2x + 5y)
127. ( x menos 1 medio y ) elevado a la 3 
128. Halla por simple inspección:
129. x elevado a la 5 menos 1 sobre x menos 1 
130. (8 m elevado a la 3 mas n elevado a la 6) sobre (2m mas n elevado a la 2)
131. (1 menos a elevado a la 3) sobre (1 menos a) 
132. ( x elevado a la 3 menos 8 y elevado a la 3)  sobre (x menos 2 y )  
133. ( x elevado a la 6 menos 49 y elevado a la 6) sobre ( x elevado a la 3 mas 7 y elevado a la 3) 
134. ( a elevado a la  16 menos b elevado a la 16) sobre (a elevado a la 2 mas b elevado a la 2)
135. (1 mas a elevado a la 3) sobre (1 mas a ) 
136. (16 x elevado a la 2 y elevado a la 4 menos 25 m elevado a la 6) sobre (4 x y elevado a la 2 mas 5 m elevado a la 3) 
137. (x elevado a la 27 mas y elevado a la 27) sobre (x elevado a la 3 mas y elevado a la 3) 
138. ( a elevado a la  9 mas y elevado a la 9 ) sobre (a mas y)
139. ( a elevado a la 4 b elevado a la 4 menos 64 x elevado a la 6) sobre (a elevado a la 2 b elevado a la 2 mas 8 x elevado a la 3 ) 
140. (1 menos a elevado a la 2 b elevado a la 4 celevado a la 8) sobre (1 menos a b elevado a la  2 c elevado a la 4) 
141. (32 x elevado a la 5 mas 243 y elevado a la 5) sobre ( 2 x mas 3 y ) 
142. ( 16 menos ( a mas 1) elevado a la 2) sobre (4 mas ( a mas 1) ) 
143. ( 1 menos x elevado a la 12 ) sobre ( 1 menos x elevado a la 4 ) 
144. (64 x elevado a la 6 menos 343 y elevado a la 9) sobre (4 x elevado a la 2 menos 7 y elevado a la 3) 
145. (a elevado a la 18 menos b elevado a la 18) sobre (a elevado a la 3 b elevado a la 3) 
146. (1 mas x elevado a la 11) sobre ( x mas 1) 
147. ( x elevado a la 40 menos y elevado a la 40 ) sobre ( x elevado a la 8 menos y elevado a la 8 ) 
148. ( 9 menos 36 x elevado a la 10) sobre ( 3 mas 6 x elevado a la 5) 
149. (36 m elevado a la 2 menos 49 n elevado a la 2 x elevado a la 4) sobre ( 6 m menos 7 n x elevado a la 2 ) 
150. (a elevado a la 4 b elevado a la 6 menos 4 x elevado a la 8 y elevado a la 10) sobre ( a elevado a la 2 b elevado a la 3 mas 2 x elevado a la 4 y elevado a la 5) 
151. (1 menos 9 x elevado a la 2 m mas 4 ) sobre (1 mas 3 x elevado a la m mas 2) 
152. ( ( a menos x ) elevado a la 2 menos y elevado a la 2 ) sobre ( ( a menos x) menos y ) 
153. Escribe el cociente sin efectuar la división
154. ( x elevado a la  8 menos 1 ) sobre ( 1 mas x elevado a la 4 ) 
155. (27 m elevado a la 3 mas n elevado a la 6) sobre ( 3 m mas n elevado a la 2 )
156. (1 menos a elevado a la 7) sobre  (1 menos a) 
157. ( x elevado a la  18 menos 125 y elevado a la 3) sobre ( x elevado a la 6 menos 5 y ) 
158. (x elevado a la 12 menos 81 y elevado a la 2 ) sobre ( x elevado a la 6 mas 9 y )  
159. ( m elevado a la 14 menos n elevado a la 14)  sobre ( m elevado a la 2 menos n elevado a la 2 ) 
160. (1 mas a elevado a la 6) sobre ( 1 mas a) 
161. (25 x elevado a la 2 y elevado a la 4 menos 4 m elevado a la 6 ) sobre ( 5 x y elevado a la 2 mas 2 m elevado a la 3) 
162. (1 mas y elevado a la 11) sobre ( y mas 1) 
163. ( 100 menos ( x mas 1) elevado a la 2 ) sobre ( 10 mas (x mas 1) ) 
164. (y elevado a la 3 mas y elevado a la 12 ) sobre (  y mas x elevado a la 4 ) 
165. (100 x elevado a la 6 menos 36 y elevado a la 8) sobre ( 10 x elevado a la 3 menos 6 y elevado a la 4) 
166. ( a elevado a la  12 menos b elevado a la 12) sobre ( a elevado a la 4 b elevado a la 4 ) 
167. ( ( m mas n) elevado a la 6 menos y elevado a la 6) sobre ( ( m mas n ) elevado a la 2 menos y elevado a la 2) 
168. ( 1 mas x elevado a la  13) sobre ( x mas 1)  
169. ( x elevado a la 20 menos y elevado a la 20 ) sobre ( x elevado a la 4 menos  y elevado a la 4) 
170. Calcula:
171. ( x elevado a la 8 menos 1 ) sobre ( 1 mas x elevado a la 4) 
172. ( 1 menos a elevado a la 7 ) sobre ( 1 menos a) 
173. (27 m elevado a la 3 mas n elevado a la 6) sobre ( 3 m mas n elevado a la 2) 

### Prepárate para el ICFES

1. Si las áreas del cuadrado amarillo y el cuadrado verde son las que se muestran en la imagen, los rectángulos azules tiene cada uno un área de:

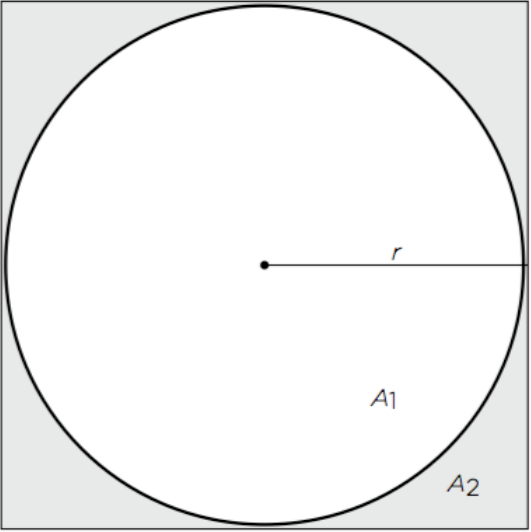
Imagen 38: Producto Notable.

Producto notable de manera gráfica


**Descripción Imagen:** Cuadrado de lado, con particiones de forma horizontal y vertical de medida en el ancho de valor b. Al interior se obtienen producto de las divisiones dos cuadrados uno en el cual tiene escrito (a – b) al cuadrado y el otro b al cuadrado, y tiene dos rectángulos ambos tienen escrito en el medio ab.

1. ab
2. (b - a)a
3. (a - b)b
4. (a - b)a
5. b(b - a)
6. Si al área del cuadrado mayor, se le restan las áreas correspondientes a los rectángulos azules y la del cuadrado verde, se obtiene la expresión algebraica:
7. a elevado a la 2  + 2b (a - b) - b elevado a la 2
8. a elevado a la 2  + 2b (a - b) + b elevado a la 2
9. a elevado a la 2 - 2b (a - b) - b elevado a la 2 
10. a elevado a la 2 -- 2b (a - b) + b elevado a la 2 
11. EI producto notable cuya interpretación geométrica se describe en la imagen es:
12. ( a mas b ) elevado a la 2 =a elevado a la 2  - 2ab - b elevado a la 2
13. (a menos b ) elevado a la 2 =  a elevado a la 2 + 2ab - b elevado a la 2
14. ( a mas b) elevado a la 2 =a elevado a la 2 + 2ab - b elevado a la 2
15. (a menos b) elevado a la 2 = a elevado a la 2 - 2ab + b elevado a la 2
16. El polinomio que representa el área de la figura sombreada si el radio del circulo es x y el lado del cuadrado mide y, es:

Imagen 39: Círculo en el cuadrado.



**Descripción Imagen:** Dibujo de un cuadrado el cual tiene el circulo circunscrito de radio r, la parte del cuadrado no ocupada por el círculo está marcada con A2 y el círculo con A1.

1. y  elevado a la 2 menos pi x elevado a la 2
2. pi x elevado a la 2 
3. y elevado a la 2
4. pi x elevado a la 2 menos y elevado a la 2 
5. Consideremos un cuadrado de lado a. Si duplicamos el lado del cuadrado:

Podemos afirmar que su área...

1. Se duplica.
2. No varía
3. Aumenta cuatro veces.
4. No se puede determinar,
5. Si el área de un tercer cuadrado es 1 cuarto a elevado a la 2 , entonces la longitud de su lado, con respec­to al cuadrado de lado a:
6. Se duplicó.
7. Aumentó tres veces.
8. Disminuyó cuatro veces.
9. Se redujo a la mitad.
10. Considera un cubo arista a. Si se duplica su lado:

El volumen del cubo obtenido es:

1. 2 a elevado a la 3
2. 4 a elevado a la 3
3. 6 a elevado a la 3
4. 8 a elevado a la 3
5. Si el volumen de un cubo es V igual a 1 octavo a  elevado a la 3  entonces la longitud de la arista
6. Se duplicó.
7. Se redujo a la mitad.
8. Se redujo a la tercera parte.
9. Se triplicó.
10. El perímetro del polígono ABYXZC es:

Imagen 40: Rectángulo

Rectángulo con cuadrado al interior.


**Descripción Imagen:** Rectángulos de vértices A, B, C, W. tiene un cuadrado al interior entre el segmento B W se encuentra un vértice del cuadrado denominado con la letra Y, entre C, W está Z el otro vértice del rectángulo, y el otro vértice es X y está al interior del rectángulo.

1. 14
2. 20
3. .28
4. No se puede determinar con base en la información dada.
5. El área de la región amarilla en el siguiente imagen, corresponde a:

Imagen 41: Cuadrado

Cuadrado con lados gruesos.


**Descripción Imagen:** Cuadrado de lado a + b, las líneas verticales de medida B, se han marcada en todos los ladas del cuadrado y estas forman rectángulos al interior del cuadrado.

1. (a mas b)  elevado a la 2 menos ( a menos b)   elevado a la 2 
2. 4ab
3. A y b
4. a b   elevado a la 2 menos a b 
5. La figura anterior representa la interpretación geométrica de:
6. (a ams b)   elevado a la 2 menos (a menos b)   elevado a la 2 igual a 4 a b 
7. (a menos b)   elevado a la 2 menos ( a mas b)   elevado a la 2 igual a 4 a b 
8. (a mas b)   elevado a la 2 mas ( a menos b)   elevado a la 2 igual a 4 ab 
9. (a menos b )   elevado a la 2 mas ( a mas b)   elevado a la 2 igual a 4 ab 

### Curiosidades Matemáticas

Dile a uno de tus amigos:

* Piensa un número.
* Multiplícalo por 2.
* Súmale 18.
* Calcula la mitad.
* Dime el resultado.

*Luego, restas 9 al resultado que te dan y obtendrás el número pensado por tu amigo. ¿Por qué ocurre esto?*

### Pasatiempos Inteligentes

1. El triángulo de Pascal se puede emplear para resolver problemas de probabilidad.

Por ejemplo, determinar cuál es la probabilidad de que, al tener cuatro hijos, dos sean hombres y dos sean mujeres.

Las distintas posibilidades son:

* 4 hombres
* 4 mujeres
* 1 hombre y 3 mujeres
* 1 mujer y 3 hombres
* 2 hombres y 2 mujeres

Veamos cómo usar el triángulo de Pascal.

Fíjate en la cuarta fila (sin contar la punta del triángulo).

Imagen 42: Triángulo de Pascal.

Imagen del triángulo de Pascal.


**Descripción Imagen:** Triángulo de Pascal hasta el nivel 6.

* Suma los datos de la fila:

(1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16)

* Los valores extremos (1 y 1) muestran la probabilidad de que todos los hijos sean del mismo sexo (4 hombres ó 4 mujeres).

1 sobre 16 

* El segundo valor (4) determina la probabilidad de tener un hijo de un sexo y tres del otro (1 hombre y 3 mujeres ó 1 mujer y 3 nombres).

4 sobre 16 igual a 1 sobre 4 

* El valor del centro (6) nos indica la probabilidad de tener tantos hijos hombres como mujeres (2 hombres y 2 mujeres).

6 sobre 16 igual a 3 sobre 8 

Utiliza el triángulo de Pascal para determinar cuál de los posibles lanzamientos (6 caras 0 sellos; 5 caras 1 sello; 5 sellos 1 cara; 4 caras 2 sellos; 4 sellos 2 caras; 3 caras 3 sellos; 3 sellos 3 caras) tiene mayores probabilidades de resultar al lanzar 6 monedas.

1. Pasamos ahora a un grupo de adivinanzas particularmente cautivadoras. Todas ellas tienen lugar en la isla de caballeros, escuderos y normales (los caballeros siempre dicen la verdad, los escuderos siempre mienten, y los normales pueden ser escuderos o caballeros). Maximiliano es un habitante de la isla. Se ha come­tido en la isla un crimen, y por alguna extraña razón se sospecha que Maximiliano es el criminal y por ello lo conducen ante un tribunal para que sea juzgado. A Maximiliano le está permitido formular solamente un enunciado en su defensa. El objetivo de Maximiliano es convencer al juzgado de su inocencia.

* Supón que el criminal es escudero y que Maximiliano también lo es (aunque esto no lo sepa el tribunal), pero que no obstante Maximiliano es inocente. A Maximiliano le está permitido formular solamente un enunciado con el que no debe convencer al jurado que no es escudero, sino que es inocente del crimen. ¿Qué debe decir Maximiliano?
* Supón que Maximiliano se encuentra en la misma situación con la única diferen­cia que ahora es culpable. ¿Qué debe decir Maximiliano para convencer de su inocencia al jurado, integrado por seres racionales?
* En este problema, supón que se sabe que el criminal es un caballero (esto no es ninguna contradicción; no es necesario que una persona tenga que mentir para cometer un crimen). Supón también que Alejandro es caballero (circunstancia que el jurado desconoce), pero es inocente. ¿Qué enunciado formulará Alejandro para demostrar su inocencia?
* Aquí la dificultad es mayor. Supón que en este problema se sabe que el criminal no es normal -es caballero o escudero-. Por su parte, Santiago es inocente. ¿Qué enunciado formularía Santiago que pudiera ser emitido por un caballero, o por un escudero, o por un normal, que se encontrase en posición idéntica a la tuya, para convencer al jurado de tu inocencia?

1. La dirección de esta casa es un misterio. El dueño es un matemático y en lugar de poner el letrero con el número ha puesto una clave:

La dirección de esta casa tiene:

* Tres dígitos diferentes
* El primer dígito es mayor que 4.
* El producto de los dos primeros dígitos es 12.
* La suma de los tres dígitos es 17.

1. En una mesa hay 3 jarros. Uno de ellos, que está vacío, tiene una capacidad de 3 litros. En el otro, también vacío, ca­ben 5 litros. En el tercero, que está lle­no de leche fresca caben 8 litros. Descorazonados dos amigos están senta­dos a la mesa, queriendo dividir la be­bida en partes iguales: 4 litros para cada uno de ellos. Ninguna idea parece surgirles para resolver el dilema... ayuda a resolver el problema a estos dos sedien­tos amigos.

### Proyecto

El producto (2x + 1) (x + 5) se desarrolla geométricamente, calculando el área de un rectángulo como se muestra en la siguiente imagen:

Imagen 43: Producto Notable.

Rectángulo como representación de producto notable.


**Descripción Imagen:** Rectángulo de lado 2x + 1 y x + 5.

Los lados del rectángulo son (2x + 1) y (x + 5), de modo que su área es:

A= (2x+1) (x+5)

Por otra parte, las áreas de los rectángulos interiores son las indicadas, por lo tanto:

A = 2 x   elevado a la 2 + x + 10x + 5

= 2 x  elevado a la 2 + 11x + 5

Luego, A = (2x + 1) (x + 5) = 2 x  elevado a la 2 + 11x + 5

¿Crees que este método sirve sólo si los números que aparecen son positivos? Explica.

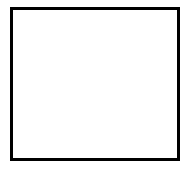
Usa el método anterior para realizar las siguientes multiplicaciones:

1. (2x + 3)(x + 4)
2. (x + 2)(x + 3)
3. (4x+1)(2x+5)
4. (x+1)(3x + 4)

**ACTIVIDAD:**

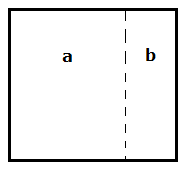
1. Toma un pedazo de papel cuadrado.

Imagen 44: Cuadrado.



1. Haz un pliegue vertical y escribe a en la superficie mayor y b en la menor.

Imagen 45: División en cuadrado



**Descripción Imagen:** Cuadrado con línea punteada vertical, cada división queda marcada con b y la otra con a.

1. Dobla una esquina y marca un punto P en el borde derecho.

Imagen 46: Pliegue en esquina.

pliegue en esquina del cuadrado, marcada con el punto p.


**Descripción Imagen:** Pliegue en la esquina superior de la división generada en el cuadrado anterior, el pliegue hasta unir con la línea punteada.

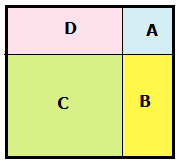
1. Desdobla la esquina y ahora en P haz un pliegue horizontal.

Imagen 47: Divisiones punteadas.

Cuadrado, con interior otros dos cuadrados y dos rectángulos.


Descripción Imagen: Cuadrado con divisiones al interior, generadas por pliegues descritos en imágenes previas.

1. Diferencia las regiones A,B, C y D



**Descripción Imagen:** Cuadrado con divisiones al interior, generadas por pliegues descritos en imágenes previas. El cuadrado de lado b, quedó nombrado como A, el cuadrado de lado mayor queda nombrado como C, dos rectángulos nombrados como B y D.

* A es un cuadrado de área b  elevado a la 2.
* B es un rectángulo de área ab.
* C es un cuadrado de área a  elevado a la 2.
* D es un rectángulo de área ab.

El cuadrado entero tiene área (a mas b)   elevado a la 2.

Intenta deducir la fórmula para el cua­drado del binomio.

# TEMA 4: FACTORIZACIÓN

**HISTORIA DE LA NOTACIÓN ALGEBRAICA**

Francois Viéte, el llamado "matemático francés más importante del siglo XVI” fue abogado, miem­bro del Parlamento y consejero particular del rey Enrique IV de Francia, que dedicaba sus horas li­bres a las matemáticas. Se cuenta que descifró un código secreto español que contenía centenares de símbolos y que durante varios años Francia se apro­vechó de ello en su guerra contra España. Pero la contribución más importante de Viéte fue proba­blemente haber utilizado "parámetros" por pri­mera vez en la historia de las matemáticas.

La idea de los parámetros ha sido fundamental en el desarrollo de las matemáticas: en geometría por ejemplo, un diagrama de triángulo ABC podía re­presentar "todos" los triángulos pero en álgebra no se conocían esas generalizaciones. En álgebra se estudiaban sólo casos especiales, se resolvían ecuaciones con coefi­cientes específicos, pero no existía un mode­lo que representara "todas" las ecuaciones cuadráticas o "todas" las ecuaciones cúbicas.

Viéte empezó a utilizar vocales para repre­sentar las incógnitas y consonantes para re­presentar magnitudes o números dados o su­puestamente conocidos (parámetros). Con esta idea, a partir de Viéte, con el álgebra se pudo estudiar clases de ecuaciones y concen­trarse en la estructura de los problemas y no en su forma particular.

Viéte escribía, por ejemplo:

"B in A quadratum, plus D plano in A, aequari Z sólido", cuyo significado es: b a elevado a la 2 mas d elevado a la 2 a igual a z , que corresponde a:

a x elevado a la 2 mas b x mas c igual a 0 

Representando así "todas" las ecuaciones de segundo grado.

Es interesante notar que, para Viéte, las letras repre­sentaban solamente números positivos y que esas le­tras correspondían a magnitudes geométricas cuya na­turaleza había que indicar a fin de respetar lo que él llamó la ley de homogeneidad (parecido a las ecuaciones en física). Pero aquí también Viéte dio un salto importante y fue más allá de las tres dimensio­nes de la geometría euclidiana; para muchos mate­máticos de su época, eso era "contra - natura " (con­tra la naturaleza)..

La influencia de la geometría sobre el álgebra era to­davía muy fuerte en esa época y se nota en la forma de expresar las potencias sucesivas de un número. A continuación aparecen algunos ejemplos, teniendo en cuenta que el latín era la lengua internacional de las matemáticas.

| SIGLO XXI | HOY |
| --- | --- |
| Lotus in se facit quadratum | x.x = x al cuadrado |
| Lotus in quadratum facit cubum | x. x al cuadrado = x al cubo. |

Con este tipo de notación no es de extrañar que el álgebra haya avanzado tan lentamente.

**IMPORTANCIA DE LOS SÍMBOLOS EN LAS MATEMÁTICAS**

La frase siguiente fue escrita en una tableta de arcilla por los matemáticos babilonios unos 2000 años a. C.: " El cuadrado de la suma de dos números es igual la suma de tres términos: el primero es el cuadrado del primer término, el segundo es el doble del producto de los números y el tercero es el cuadrado del segundo número".

Los matemáticos griegos, unos 500 años a. C., explicaban geométricamente lo mismo con la siguiente figura:

Imagen 48: Binomio al cuadrado

Representación mediante suma del área de figuras geométricas de el cuadrado de un binomio.


Descripción Imagen: Suma de un cuadrado de área a al cuadrado con 2 veces el rectángulo de área ab y el cuadrado de área b al cuadrado

La última expresión es más concisa, más general, clara y sencilla que la frase anterior, y cualquier persona la entiende y la sabe usar.

En el siglo XVI de nuestra era, cuando las matemáticas tuvieron que resolver problemas cada vez más complejo planteados por el desarrollo de la ciencia y del comercio, el simbolismo y el uso generalizado de las variables empezó a invadir las matemáticas y a cambiar su lenguaje éste fue un momento clave en la historia de las matemáticas.

"Según el matemático Alfred North gracias al simbolismo avanzamos en el razonamiento casi mecánicamente, sólo con la mirada; sin él tendríamos que utilizar centros más especializados del cerebro. Una buena notación nos libera del trabajo innecesario y nos permite concentrarnos en los aspectos más difíciles de los problemas".

**ÁMBITO CULTURAL Y $OCIAL**

1. ¿ Qué es un parámetro?
2. ¿ Cuál es la relación entre la geometría y el álgebra ?
3. ¿Qué es lo que para los matemáticos de la época de Vieté va en contra de la naturaleza?
4. ¿Cuál es la razón, según la lectura, por la que el álgebra se desarrolló tan lentamente?
5. ¿Cuál es la importancia del simbolismo en las matemáticas y en especial en el álgebra?

Imagen 49: Casos de Factorización.

Mapa conceptual de los casos de factorización.


**Descripción Imagen:** Mapa conceptual con título Expresiones algebraicas, de este se desprende el subtítulo Factorización, de éste se desprenden 3 subtítulos: Factor Común, Binomios y Trinomios. De factor común se desprende un cuadro que contiene Monomios, Polinomio por agrupación de términos. De Binomios se desprende un cuadro que contiene Diferencia de Cuadrados, Diferencia de Cubos y Suma de Cubos, De Trinomios se desprende un cuadro que contiene Trinomio Cuadrado Perfecto, Trinomios de la forma **x al cuadrado** + bx + c y Trinomio de la forma ax al cuadrado + bx + c

## FACTORIZACIÓN O DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

1. Desarrolla los siguientes productos:
2. 4x(3b + 2b)
3. 5x(x elevado a la 2 + 11)
4. (4m - 3) (3m + 2)
5. Desarrolla las siguientes operaciones:
6. 3 septimos menos 1 medio menos 1 tercio mas 1 cuarto 
7. 3 octavos dividido ( menos 3 cuartos) 
8. (menos 3 quintos) por (menos 1 tercio) por (menos 3) por (2 quintos) 

**FACTORIZACIÓN**

Así cómo es posible descomponer un número en factores primos, también podemos descomponer un polinomio en factores primos. Este procedimiento se conoce con el nombre de factorización.

Se llaman factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión.

## FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES QUE CONTIENEN FACTORES COMUNES

1. **Factor común monomio**

Para factorizar un polinomio en el que sus tér­minos tienen un factor común, se toma como pri­mer factor el divisor común de todos los térmi­nos del polinomio y el segundo factor es la suma algebraica de los cocientes que resultan de divi­dir los términos entre el factor común.

Realizar esta factorización equivale a realizar el proceso inverso de la propiedad distributiva con respecto a la suma y a la resta.

**Ejemplo**

Factorizar 12a elevado a la 4+ 14ab

**Solución:**

El factor común es 2a, por lo tanto los térmi­nos que van dentro del paréntesis son:

(12 a elevado a la 4) sobre (2 a) igual a 6 a elevado a la 3 

14 a b sobre 2 a igual a 7 b 

Luego:

12 a elevado a la 4 mas 14 a b igual a 2 a ( 6 a elevado a la 3 mas 7 b) 

1. **Factor común polinomio**

Cuando todos los términos de un polinomio tienen un factor común que es un polinomio, procede de la misma forma que en el caso anterior: se escribe el polinomio común como factor de los cocientes obtenidos al dividir cada término del polinomio entre dicho factor común.

**Ejemplo**

Factorizar a elevado a la 3 ( a menos b mas 1) menos b elevado a la 2 (a menos b mas 1) 

**Solución**

Los dos términos de esta expresión tienen como factor común el trinomio a - b + 1.

Se escribe (a - b + 1) como primer factor y dentro de un paréntesis se escriben los co­cientes de dividir los dos términos de la ex­presión dada entre el factor común.

Por lo tanto:

a elevado a la 3 (a menos b mas 1) menos b elevado a la 2 (a menos b mas 1) 

=(a elevado a la 3 menos b elevado a la 2) ( a menos b mas 1) 

1. **Factor común por agrupación**

Algunas veces no todos los términos de un polinomio tienen factor común, pero pueden ser asociado y factorizados de manera independiente. Si los términos que quedan dentro del paréntesis son iguales se puede factorizar la expresión.

**Ejemplo**

1. Factorizar 2ab - 6ac + 3b - 9c

**Solución:**

El primer y tercer términos tienen como factor común b, mientras que el segundo y cuarto términos tienen como factor común a 3c. La expresión se factoriza así:

2ab - 6ac + 3b - 9c = (2ab + 3b)- (6ac + 9c)

2ab - 6ac + 3b - 9c = b (2a + 3) - 3c (2a + 3)

2ab - 6ac + 3b - 9c = (b-3c)(2a + 3)

1. Factorizar

6 x elevado a la 2 mas 24 x y mas 10 x mas 40 

**Solución**

6 x elevado a la 2 y mas 24 x y mas 10 x mas 40 =

6 x y ( x mas 4) mas 10 (x mas 4) 

igual a (6 x elevado a la 2 y mas 10) ( x mas 4) 

Observa que se agruparon el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto. Pero también se puede agrupar el primero con el tercero y el segundo con el cuarto, así:

( 6 x elevado a la 2 y mas 10 x) mas (24 x y mas 40) =

2 x ( 3 x y mas 5) mas 8 ( 3 x y mas 5) 

igual ( 2 x mas 8 ) ( 3 x y mas 5) 

A pesar de tener una apariencia diferente, dos factorizaciones son equivalentes, pues:

(2 x mas 8 ) ( 3 x y mas 5)  igual a 2 ( 3 x y mas 5 ) (x mas 4) 

igual a (6 x y mas 10 ) (x mas 4) 

La factorización es útil a la hora de resolver ecuaciones como la que describe las as entre los objetos y una cámara que su imagen.

### Practica lo aprendido

1. Descompón en sus factores primos cada uno de los siguientes números:
2. 12
3. 15
4. 37
5. 1
6. 30
7. Aplica la propiedad distributiva en los siguientes ejercicios:
8. a(b + 1)
9. -a(m + n)
10. r(r + s)
11. 3a (m + d)
12. 2(x + y)
13. x(a - b)
14. 4x(y + z)
15. a(a + c)
16. 3(a + b)
17. -p(p + q)
18. 2b(b + 2)
19. 10z(x + z)
20. Evalúa cada una de las siguientes expresiones. Observa el ejemplo.

11 elevado a la 2 - 7 x 11 =

11 x 11 - 7 x 11 =

11(11 - 7) =

11 x 4

1. 12 x 13 – 60 + 12
2. 65 x 3 + 65 x 7
3. 7 x 13 + 8 x 13
4. 7 elevado a la 2 - 28 + 7 x 17
5. 45 x 13 – 43 x 3
6. 83 elevado a la 2  x 3 + 83 x 17
7. 11 elevado a la 2 - 6 x 11 + 5 x 11
8. 23 elevado a la 2  x 5 + 23 x 11
9. 7 x 19 – 3 x 19
10. 13 elevado a la 2  - 5 x 13 + 2 x 13
11. 2 x 9 + 9 elevado a la 2 
12. 18 elevado a la 2  - 3 x 18 + 1 x 18
13. Encuentra el factor que completa cada igualdad:
14. 6t elevado a la 2  = (2t) (?)
15. 48c elevado a la 5 t elevado a la 4  = (-3c elevado a la 3 d elevado a la 2 ) (?)
16. 72h elevado a la 3 k = (-8hk) (?)
17. 9a elevado a la 2 b elevado a la 4  = (3a elevado a la 2 b elevado a la 2 ) (?)
18. -28r elevado a la 4 s elevado a la 3= (-r) (?)
19. (3 a elevado a la 3 b elevado a la 2 ) elevado a la 2  (?) = 18 a elevado a la 6 b elevado a la  7
20. menos 35 x elevado a la 3 y elevado a la 5 igual a ( 7 x elevado a la 2 y) (?) 
21. 57 a b elevado a la 2 . (16,/,2)
22. (15 a b elevado a la 2) elevado a la 2  (?) = 30 a elevado a la 3 b elevado a la 4 
23. Factoriza obteniendo el factor común monomio en cada caso:
24. 24 a elevado a la  2 b mas 4 a b c 
25. 15 x elevado a la 3 y elevado a la 2 menos 10 x elevado a la 2 y elevado a la 3 
26. a elevado a la 2  b elevado a la 3 d menos a elevado a la 2 b elevado a la 2 d elevado a la 2 
27. x elevado a la 3 menos 3 x elevado a la 2 mas 4 x elevado a la 4 
28. 75 ( rts elevado a la 2) elevado a la 2 mas (5 r ) elevado a la 3 
29. 15 a menos 27 b mas 9 c 
30. 5 a menos a elevado a la 2 mas a elevado a la 3 
31. 2 x elevado a la 4 mas 6 x mas 8 x elevado a la 3 menos 10 x elevado a la 4 
32. 20 m elevado a la 3 mas  30 m elevado a la 4 menos 40 m elevado a la 2 menos 50 m elevado a la 5
33. 27 a elevado a la 2 b elevado a la 3 menos 18 a elevado a la 4 b elevado a la 5 mas 45 a b elevado a la 4 
34. 5 x elevado a la 2 y elevado a la 3 mas 7 x y elevado a la 4 menos 8 x elevado a la 3 y elevado a la 7 menos 9 x elevado a la 5 y elevado a la 5 
35. abc menos 2 a elevado a la 2 d mas 3 ac menos 5 a 
36. a elevado a la 2 b elevado a la 3 d menos a elevado a la 2 b elevado a la 2 d elevado a la 2
37. 10 p elevado a la 2 q elevado a la 3 mas 14 p elevado a la 3 q elevado a la 2 menos 18 p elevado a la 4 q elevado a la 3 menso 16 p elevado a la 5 q elevado a la 2
38. 14 p elevado a la 3 q elevado a la 4 menos 7 p elevado a la  2 q elevado a la 2 mas 28 p elevado a la 5 q elevado a la 6 mas 21 p elevado a la 7 q elevado a la 2 
39. 0,6 a b elevado a la 5 mas  0, 4 a elevado a la 2 b elevado a la 3 menos 0,8 a elevado a la 3 b elevado a la 4 
40. 21 a elevado a la 3 b elevado a la 5 menos 1,5 a elevado a la 2 b elevado a la 4 mas 0,9 a elevado a la 4 b elevado a la 3
41. 2,2 p elevado a la 3 q elevado a la 4 mas 3,3 p elevado a la 4 q elevado a la 3 mas 4 ,4 p elevado a la 5 q elevado a la 4 menos 5 , 5 p elevado a la 4 q elevado a la 5
42. 1 medio a elevado a la 2 b elevado a la 3 mas 1 cuarto a elevado a la 3 b elevado a la 5 menos 1 octavo a elevado a la 5 b elevado a la 5 mas 1 sobre 16 a elevado a la 4 b elevado a la 3 
43. 4 sobre 35 a elevado a la 2 b menos 12 sobre 5 a b mas 8 sobre 15 a elevado a la 2 b elevado a la 3 menos 16 sobre 25  a elevado a la 5 b elevado a la 6
44. 12 quintos m n menos 18 septimos m elevado a la 2 n mas 24 novenos m n elevado a la 2 
45. 15 sobre 21 x elevado a la 3 y elevado a la 4 menos 27 sobre 28 x elevado a la 4 y elevado a la 3 mas 9 sobre 14 x elevado a la 2 y elevado a la 3 mas 21 sobre 35 x elevado a la 3 y elevado a la 2 
46. 1,5 a menos 2,5 b 
47. 0,6 a b elevado a la 3 mas 6 a elevado a la 3 b 
48. 3 cuartos x elevado a la 2 y menos 9 octavos x y elevado a la 2 
49. 2 x elevado a la 4 mas 6 x 
50. Factoriza obteniendo el factor común
51. 3(x + y) + z(x + y)
52. e(f – g) - 4(f – g)
53. 7(r – s) + t(r – s)
54. 2a (a +3) – (3 + a)
55. 2x (x- y) + y(y – x)
56. 2u(u – 2v) + v (u – 2v) + (u – 2v)
57. X(2w – 3v + u) – (2w – 3v +u)
58. (s elevado a la 2  - 2ps +2s) - (2s – 4p + 4)
59. (3t – 3st) + (rs – r)
60. (12x elevado a la 2 - 8xy) – 5(3xz – 2yz)
61. 9m - 3 + 24m elevado a la 2 - 8m
62. w(x - y) - 8(x - y)
63. 7 (m - n) + p(n - m)
64. u(v – 2) + 2(2 - v)
65. 3p(2q - p) - 2q(p - 2q)
66. a (a - b)+ 4b (a - b) - a (a - b)
67. r (r - s - 2t) + s (r - s - 2t)
68. (x elevado a la 2  - xy + x) - (y - x - 1)
69. (9p - 3pq)+ (2nq – 6n)
70. (p elevado a la 2  - 2pq) - 2 (2qr - pr)
71. Determina los factores comunes de cada grupo y completa la factorización:
72. (3x elevado a la 2 - 3x) + (2x - 2)
73. (3 x elevado a la 2  - 12x) - (2x - 8)
74. (8u elevado a la 2 + 4u) - (2u + 1)
75. (2x elevado a la 2  + 4x) + (3x + 6)
76. (2y elevado a la 2  - 10y) - (3y - 15)
77. (6x elevado a la 2 + 10x) - (3x + 5)
78. En lugar de los signos de interrogación, anota expresiones algebraicas que igualen ambos ' miembros de la igualdad.
79. 3x elevado a la 2  - 3x + 2x – 2 = (3x elevado a la 2 - 3x) + (?)
80. 3 x elevado a la 2  - 12x - 2x + 8 = (3 x elevado a la 2  - 12x) – (?)
81. 8u elevado a la 2  + 4u - 2u - 1 = (8u elevado a la 2  + 4u) - (?)
82. 2x elevado a la 2  + 4x + 3x + 6 = (2x elevado a la 2  + 4x) + (?)
83. 2y elevado a la 2  - 10y - 3y + 15 = (2y elevado a la 2  - 10y) - (?)
84. 6x elevado a la 2  + 10x - 3x – 5 = (6x elevado a la 2  + 10x) - (?)
85. Factoriza agrupando términos:
86. 3a + ab + 3c + bc
87. x elevado a la 2  - 2x + xy - 2y
88. h elevado a la 2  - hk + hr – kr
89. p elevado a la 3 
90. p elevado a la 2 - 2pq + pr - 2qr
91. 3hk - 2k - 12h + 8
92. 4 z elevado a la 3 menos 6 z elevado a la 2 menos 6 z mas 9 
93. (h elevado a la 2 k mas 4 k elevado a la 2) mas (h elevado a la 2 k mas 4 k) 
94. x elevado a la 3 menos 3 x elevado a la 2 menos x mas 3 
95. rs + 5r + st + 5t
96. u elevado a la 2 - 2u + uv -2v
97. x elevado a la 2  - 2xy + 4xz - 8yz
98. 3 a elevado a la 3 mas a elevado a la 2 mas 6 a mas 2 
99. u elevado a la 2 menos 3 u v menos 6 u w mas 18 v w 
100. 3ab – b – 4 + 18a
101. 3 u elevado a la 3 menos u elevado a la 2 menos 9 u mas 3 
102. ( a elevado a la 2 b elevado a la 2 mas 2 a elevado a la 2) menos ( 2 a b elevado a la 2 mas 4 a ) 
103. n elevado a la 3 mas 2 n elevado a la 2 menos 4 n menos 8 
104. x elevado a la 3 mas x elevado a la 2 mas x mas 1 
105. r elevado a la 2 s elevado a la 2 mas s elevado a la 2 t menos r elevado a la 2 t menos t elevado a la 2 
106. a elevado a la 2 menos 2 a menos 2 b mas ab 
107. 6 a b menos 4 a d menos 9 bc mas 6 bd mas 15 c elevado a la 2 menos 10 c d 
108. menos a c mas b n elevado a la 2 mas a m elevado a la 2 menos b c mas b m elevado a la 2 mas a n elevado a la 2 
109. 0,2xz – 2x + 3y – 0,3yz
110. 15 cuartos x elevado a la 2 menos 21 cuartos x z menos 10 tercios x y mas 14 tercios y z mas 5 x menos 7 z  
111. 3 a elevado a la 3 menos 9 a x elevado a la 2 menos x mas 3 a
112. Factoriza:
113. 2m elevado a la  2- 8m + 5m – 20
114. 4x elevado a la 2 - 10x + 2x – 4
115. 6x elevado a la 2 - 9x - 4x + 6
116. 12x elevado a la 2 + 8x - 9x – 6
117. 3u elevado a la 2  - 12u – u + 4
118. 6m elevado a la 2  + 4m - 3m – 2
119. 6u elevado a la 2  + 3uv - 4uv - 2y elevado a la 2 
120. 2x elevado a la 2  - 4xy – xy + 2y elevado a la 2 
121. 6x elevado a la 2 + 3xy - 10xy - 5y elevado a la 2 
122. 4u elevado a la 2  - 16uv – 3uv - 12v
123. 3x elevado a la 2  - 3x + 2x – 2
124. 2x elevado a la 2  + 4x + 3x + 6
125. 3x elevado a la 2  - 12x - 2x + 8
126. 2y elevado a la 2  - 10y - 3y + 15
127. 8u elevado a la 2 +4u - 2u + 1
128. 6x elevado a la 2 + 10x - 3x – 5
129. Observa que:

12 elevado a la 2 - 8 x 12

= (12 - 8) x 12

= 4 x 12

= 48.

Calcula el valor de:

1. 85 x 5 + 85 x 7
2. 15 elevado a la 2  - 7 x 15 + 2 x 15
3. 42 x 11 + 73 x 11
4. 5 x 18 – 4 x 18 + 7 x 18
5. 77 elevado a la 2  + 77 x 24
6. 11 elevado a la 2  - 6 x 11 + 5 x 11
7. Factoriza las siguientes expresiones:
8. 2xA + 3A
9. xM - 4M
10. 10x elevado a la 2  + 15x
11. 2x elevado a la 3 V – 6x elevado a la 2 v elevado a la 2 
12. 6x elevado a la 2 v elevado a la 2  - 6xv elevado a la 3
    
13. 3x(x + 2) + 5(x + 2)
14. 4y(y + 3) + 7(y + 3)
15. 14u elevado a la 2 - 6u
16. 20m elevado a la 2 
     + 12m
17. 3m(m - 4) - 2(m - 4)
18. x(x+ y) - y(x + y)
19. m(m - n) + n(m - n)
20. 6x elevado a la 4- 9x elevado a la 3 +3x elevado a la 2
21. 6m elevado a la 4 - 8m elevado a la 3  - 2m elevado a la 2
22. 8x elevado a la 3 v - 6x elevado a la 2 v elevado a la 2  + 4xv elevado a la 3 
23. 10u elevado a la 3 v + 20u elevado a la 2 v elevado a la 2  - 15u v elevado a la 3 
24. 8x elevado a la 4 - 12x elevado a la 3 y + 4x elevado a la 2 y elevado a la 2 
25. 9m elevado a la 4 - 6m elevado a la 3 n - 6m elevado a la 2 n elevado a la 2 
26. 3x(2x + 3) - 5(2x + 3)
27. 2u(3u - 8) - 3(3u - 8)
28. x(x+ 1) - (x+ 1)
29. 3u(u - 1) - (u - 1)
30. 4x(2x - 3) - (2x - 3)
31. 3y(4y - 5) - (4y - 5)
32. Plantea una ecuación para cada enunciado y resuélvela:
33. La diferencia entre la circunferencia o perímetro de un círculo medida en centímetros y su  
    área medida en centímetros cuadrados es cero. ¿Cuál es el radio del círculo?
34. La diferencia entre el volumen de un cubo, de arista a, medido en centímetros cúbicos y su  
    área medida en centímetros cuadrados es cero. ¿Cuál es la longitud de la arista del cubo?

### Prepárate para el ICFES

**LA FÍSICA Y EL ALGEBRA**

La física es una ciencia que se ocupa de estudiar fenómenos naturales relacionados con la constitución de la materia y sus propiedades y del origen y comportamiento de sistemas tales como los planetas, las estrellas y las galaxias.

Forman parte de la física conceptos como masa, calor, carga eléctrica, temperatura, corrien­te eléctrica que se pueden considerar como variables.

La relación entre estos conceptos se expresa por medio de fórmulas en las cuales intervie­nen variables y constantes.

1. De acuerdo con el texto la física es:
2. Una ciencia que tiene por objeto el estudio de fenómenos naturales.
3. Una ciencia que utiliza el álgebra para mostrar sus descubrimientos.
4. Una ciencia que se ocupa de estudiar la constitución de la materia y sus propiedades,
5. I y II
6. I y III
7. II y III
8. Todas.
9. La masa, el calor, carga eléctrica, la temperatura, la corriente eléctrica y las ondas", son conceptos:
10. Inherentes a los fenómenos que estudia la física.
11. Más fenómenos que debe estudiar la física.
12. Propiedades de los cuerpos que estudia la física.
13. Magnitudes derivadas de otras.
14. Escribe expresiones algebraicas tomadas de textos de física, interprétalas e indica las variables y constantes que aparecen en ellas.

### Curiosidades Matemáticas

Tres números enteros consecutivos cualesquiera es­critos uno a continuación del otro, forman siempre un número divisible por tres.

Por ejemplo, los números consecutivos 8, 9 y 10, escritos uno a continuación del otro: 8910 es divisible por tres.

Ensaya y verifica esta propiedad con otros tres nú­meros consecutivos. Explica las razones por las que crees que ocurre esto.

## FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS

Explica si (a mas b) elevado a la 2 igual a elevado a la 2 mas b elevado a la 2 

¿Qué condiciones deben satisfacer a y b para que se cumpla tal igualdad?

1. **Factorización de trinomios cuadrados perfectos**

Un trinomio cuadrado perfecto es el que resulta de desarrollar el cuadrado de la suma o la diferencia de un binomio.

De otro lado, un trinomio ordenado con relación a una letra es un cuadrado perfecto cuando el primero y tercer términos son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado, se eleva al cuadrado.

**Ejemplo:**

Factorizar: x elevado a la 2  + 8x +16

**Solución**

Efectivamente la raíz de x elevado a la 2  es x, la de 16 es 4 y el doble producto de estas raíces es 2 (4x) = 8x que es el segundo término de la expresión. Por lo tanto:

x elevado a la 2  + 8x +16 = (x mas 4) elevado a la  2 

1. **Factorización de trinomios de la forma x elevado a la 2  + bx + c**

Los trinomios de la forma x elevado a la 2  + bx + c corresponden al producto de dos binomios (pro­ducto notable): (x + a)(x + b)= x elevado a la 2  + (a +b)x + ab.

**Ejemplo:**

Factorizar el trinomio: x elevado a la 2  + 9x + 20

**Solución**

Para factorizar este trinomio, que no es cuadrado perfecto, se deben multiplicar dos binomios, de tal forma que el primer término de ellos es la raíz cuadrada del trinomio, en este caso x:

Términos: x elevado a la 2  + 9x + 20 = (x + )(x + )

Los números que completan cada binomio deben ser tales que su suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y su producto el valor absoluto del tercer término.

Tales números son 5 y 4, pues 5 + 4 = 9 y además 5 x 4=20

Así: x elevado a la 2  + 9x + 20 = (x +5)(x + 4)

1. **Factorización de trinomios de la forma ax elevado a la  2 +bx +c**

Los trinomios de la forma ax elevado a la 2  + bx + c corresponden al igual que en los casos anteriores al producto de dos binomios. Veamos cómo se factorizan trinomios de esa forma a partir de un ejemplo.

**Ejemplo**

Factorizar: 3x elevado a la 2  - 10x + 3

**Solución**

Se multiplica y se divide el trinomio por el coeficiente del primer término, en este caso 3, de esta manera se obtiene:

3x elevado a la 2  - 10x + 3 = (3 x) elevado a la 2 menos 10 (3 x) mas 9 sobre 3 

El trinomio obtenido tiene la misma forma que los trinomios del caso anterior y por lo tanto su factorización se logra en la misma forma, es decir, extrayendo la raíz cuadrada del primer térmi­no y buscando dos números cuya suma sea -10 y cuyo producto sea 9.

3x elevado a la 2  - 10x + 3 = (3 x menos 9) (3 x menos 1) sobre 3 

Por último se extrae factor común y se simplifica:

3x elevado a la 2  - 10x + 3 = 3(x menos 3) ( 3 x menos 1) sobre 3 

=(x menos 3 ) ( 3 x menos 1 ) 

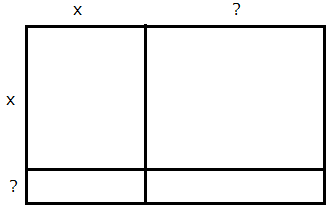
### Practica lo aprendido

1. Identifica cuáles de los siguientes trinomios son cuadrados perfectos. Factoriza aquellos que lo sean.
2. x elevado a la 2  + 6x – 9
3. 9x elevado a la 2 - 24 xy + 16y elevado a la 2 
4. 64x elevado a la 2  + 112xy - 49y elevado a la 2 
5. -4x elevado a la 2  - 20xy + 25y elevado a la 2 
6. 225 - 30r + r elevado a la 2 
7. 2x elevado a la 2 y - 36xy + 162y
8. 5c elevado a la 2  - 10c + 5
9. 4x elevado a la 2  + 24x – 36
10. 16a elevado a la 2  + 40a + 25
11. 25p elevado a la 2  + 35p + 49
12. v elevado a la 2  - 28v + 196
13. x elevado a la 2  - 6x - 9
14. Factoriza cada expresión cuando sea posible:
15. x elevado a la 2  - 6xy + 9y elevado a la 2 
16. 4a elevado a la 2  + 4a + 1
17. 4m elevado a la 4  + 20m elevado a la 2  + 25
18. 9m elevado a la 6  + 16n elevado a la 10  + 24m elevado a la  3 n elevado a la 5
19. y elevado a la 6 
20. 16 x elevado a la 6 y elevado a la 8 mas z elevado a la 14 menos 8 x elevado a la 3 y elevado a la 4 z elevado a la 7 
21. 81a elevado a la 2  - 36ab + 4b elevado a la 2 
22. 361a elevado a la 6  - 646a elevado a la 5 b  + 289a elevado a la 4 b elevado a la 2 
23. 1 + 6a + 9a elevado a la 2 
24. x elevado a la 16  menos 2 x elevado a la 8 y elevado a la 6 mas y elevado a la 12 
25. 25m elevado a la 2 + 49n elevado a la 2  - 70mn
26. 441 x elevado a la  10 y elevado a la 6  +126x elevado a la 11 y elevado a la 3  + 9x elevado a la 12 
27. 225p elevado a la 6  - 420p elevado a la 3 q elevado a la 4  +196q elevado a la 8 
28. 25 a elevado a la 2 c elevado a la 2 mas 4 d elevado a la 2 menos 20 a c d 
29. p elevado a la 12 mas 16 p elevado a la 6 q elevado a la 4 mas 68 q elevado a la 8 
30. 289 a elevado a la 2 mas 68 a b c mas 4 b elevado a la 2 c elevado a la 2 
31. 169 sobre 196 w elevado a la 2 menos 65 sobre 7 w mas 25 
32. a elevado a la 2 b elevado a la 2 menos 10 a b mas 25 
33. menos 12 h elevado a la 4 k elevado a la 7 mas 9 k elevado a la 14 mas 4 h elevado a la  8 
34. 121 a elevado a la 10 menos 198 a elevado a la 5 b elevado a la 3 c mas 81 b elevado a la 6 c elevado a la 2 
35. 31 a elevado a la 5 menos 646 a elevado a la 5 b mas 289 a elevado a la 4 b elevado a la 2 
36. a elevado a la 2 b elevado a la 2 menos 6 a elevado a la 3  b c mas 9 c elevado a la 2 
37. 9 sobre 25  p elevado a la 6 mas 2 sobre 15 p elevado a la 3 q elevado a la 4 mas 1 sobre 81 q elevado a la 8
38. 1 sobre 25 m elevado a la 16 mas 25 sobre 64 n elevado a la 2 menos 1 cuarto m elevado a la 8 n 
39. Factoriza:
40. X elevado a la 2  + 8x + 7
41. y  elevado a la 2  + 7y + 12
42. r elevado a la 2  + 9r + 20
43. y elevado a la 2  + 25y + 24
44. p elevado a la 2  - 5p + 6
45. u elevado a la 2  + 11u +18
46. x elevado a la 2  - 14x + 24
47. z elevado a la 2  - 6z + 5
48. c elevado a la 2  - 15c + 14
49. s elevado a la 2  - 12s + 20
50. x elevado a la 2  + 11x + 28
51. x elevado a la 2  + 5x + 4
52. c elevado a la 2  - 10c + 16
53. q elevado a la 2  + 16q + 15
54. m elevado a la 2  + 5m + 6
55. f elevado a la 2  - 12f + 20
56. Factoriza:
57. p elevado a la 2  + 19pq + 34q elevado a la 2
58. x elevado a la 2 - 17xy + 72y elevado a la 2
59. x elevado a la 2 - 14xy + 45y elevado a la 2
60. p elevado a la 2 + 15pq + 50q elevado a la 2
61. m elevado a la 2+ 20mn + 51n elevado a la 2
62. h elevado a la 2 - 14hk + 49k elevado a la 2
63. a elevado a la 2 + 10ab + 24b elevado a la 2
64. r elevado a la 2 - 15rs + 54s elevado a la 2
65. a elevado a la 2 + 5ab + 6b elevado a la 2
66. u elevado a la 2 + 41uv + 40v elevado a la 2
67. c elevado a la 2 - 16cd + 48d elevado a la 2
68. r elevado a la 2 + 8r + 16
69. Factoriza:
70. 5x elevado a la 2 - 13x + 6
71. 2x elevado a la 2 - x – 10
72. 5x elevado a la 2 - 11x + 2
73. 14 x elevado a la 2+ 13x + 3
74. 4x elevado a la 2 + 8x + 3
75. 6x elevado a la 2 + 5x + 1
76. 8x elevado a la 2 - 25x + 3
77. 10x elevado a la 2 - 10x – 9
78. 2x elevado a la 2 + x – 6
79. 4x elevado a la 2 - 4x – 3
80. 3 x elevado a la 2 + 4x – 4
81. 9x elevado a la 2 + 6x – 8
82. 3x elevado a la 2 + 7x + 2
83. 3c elevado a la 2 - 8c + 5
84. 5y  elevado a la 2  + 4y – 1
85. 5u elevado a la 2  - 6u – 2
86. 7x elevado a la 2 + 8x + 1
87. 5x elevado a la 2 - 17x + 6
88. 3p elevado a la 2  + 7p – 6
89. 4y elevado a la 2  - y – 3
90. 5 + 7x - 6x elevado a la 2 
91. 1 – 5b - 8b elevado a la 2 
92. 3m elevado a la 2  + 11mn + 6n elevado a la 2 
93. 2x elevado a la 2  + xy - 3y elevado a la 2 
94. Factoriza:
95. y elevado a la 2  - 10y + 25
96. x elevado a la 2  + 24x + 128
97. 6x elevado a la 2 - x + 12
98. x elevado a la 2  - 3x – 28
99. x elevado a la 2 - 30x + 225
100. 4x elevado a la 2  + 3x – 10
101. 4x elevado a la 2  - 12x + 9
102. x elevado a la 2  - 10x + 21
103. 15x elevado a la 2  + 38x – 21
104. 9x elevado a la 2  + 30x + 25
105. 14x elevado a la 2  - 25x – 25
106. x elevado a la 2  - 6xy + 9y elevado a la 2 
107. x elevado a la 2  + 260x + 2500
108. 6x elevado a la 2  - 13xy - 15y elevado a la 2 
109. -x elevado a la 2 + 3x + 28
110.  x elevado a la 2  - 3x – 28

### Practica lo aprendido

El área de los rectángulos mostrados en cada figura está representado por el trinomio que se indica debajo de cada gráfica:

Imagen 50: Gráfico para ejercicio.



**Descripción Imagen:** Rectángulo con medida x + valor desconocido, tanto en su largo como en su ancho. Se debe obtener valor desconocido del largo y del ancho para obtener cada polinomio.

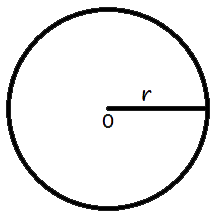
1. x al cuadrado + 5x + 4 = (x + ? )(x + ?)
2. x al cuadrado + 6x + 8 = (x + ? )(x + ?)
3. x al cuadrado + 7x + 12 = (x + ? )(x + ?)
4. Los valores correctos de la incógnita en el rectángulo 1 son:
5. -4 y – 1
6. 4 y – 1
7. -4 y 1
8. 4 y 1
9. El perímetro del rectángulo de la figura 2 es:
10. 2(x + 2) + 2(x + 4)
11. (x + 2 ) + (x + 4)
12. 2(x - 2) + 2(x - 4)
13. 2 (x - 2 ) + 2 (x - 4)
14. Al sumar las áreas de los cuatro rectángulos que forman el rectángulo 3, obtenemos:
15. x elevado a la 2  - 7x + 12
16. x elevado a la 2  - 7x – 12
17. x elevado a la 2  + 7x – 12
18. x elevado a la 2  + 7x + 12

### Curiosidades Matemáticas

Problema de la cuadratura del círculo

Un problema clásico de la geometría consiste en construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado.

Imagen 51: Circunferencia.

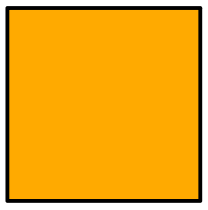


**Descripción Imagen:** Círculo de radio r, con segmento radial identificado con este valor.

**Radio: R**

**Área: pi r al cuadrado**

Imagen 52: Cuadrado



**Lado: R raíz cuadrada de pi**

**Área: pi r al cuadrado**

Ferdinand Lindeman (Alemania, ¡852) demostró, en 1882, que era imposible construir "exactamente" raìz cuadrada de pi  con regla y compás. (Los segmentos construidos con regla y compás se expresan por raíces cuadradas; pi  no es expresable por raíces cuadradas).

El problema ha sido resuelto de muchas maneras con otros me­dios, por ejemplo: la construcción geométrica de D. Spetch (1836), en la que se construye raìz cuadrada de pi  = 0,8862268 una excelente aproxi­mación con siete decimales.

## FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS

Desarrolla los siguientes productos:

1. (3x – 2b)(3x + 2b)
2. (x – y)(x elevado a la 2  - xy + y elevado a la 2 )
3. (2x + 7y) (4x elevado a la 2  - 14xy + 49y elevado a la 2 )
4. **Factorización de la diferencia de cuadrados perfectos**

Para factorizar una diferencia de cuadrados per­fectos se extrae la raíz cuadrada del minuendo y del sustraendo; y se multiplica la suma de es­tas raíces cuadradas por su diferencia:

x elevado a la 2  - y elevado a la 2  = (x-y)(x + y)

**Ejemplo**

Factorizar: 9x elevado a la 2  - 16y elevado a la 2 

**Solución**

9x elevado a la 2 - 16y elevado a la 2 = (3x-4y)(3x+4y)

1. **Factorización de la suma de cubos**

La suma de dos cubos perfectos se factoriza en dos términos: En el primero se escribe la suma de las raíces cúbicas y en el segundo se escribe el cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las raíces, más el cuadrado de la segunda raíz

x elevado a la 3 mas y elevado a la 3 igual (x mas y) ( x elevado a la 2 menos x y mas y elevado a la 2) 

**Ejemplo**

Factorizar:

343 x elevado a la 3 mas 512 y elevado a la 6

**Solución**

343 x elevado a la 3 mas 512 y elevado a la 6 

=(7 x mas 8 y elevado a la 2 ) ( 40 x elevado a la 2 menos 56 x y elevado a la 2 mas 64 y elevado a la 4)

1. **Factorización de la diferencia de cubos**

Se factoriza la diferencia en dos términos: en el primero se escribe la diferencia de las raíces cúbi­cas y en el segundo se escribe el cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz:

x elevado a la 3 menos y elevado a la 3 igual ( x menos y) ( x elevado a la 2 mas x y mas y elevado a la 2) 

**Ejemplo**

Factorizar:

(x elevado a la 3 y elevado a la 6 menos 216 y elevado a la 9 

**Solución**

x elevado a la 3 y elevado a la 6 menos 216 y elevado a la 9 

=( x yelevado a la 2 menos 6 y elevado a la 3) ( x elevado a la 2 y elevado a la 4 mas 6 x y elevado a la 5 mas 36 y elevado a la 6 )

### Practica lo aprendido

1. Expresa cada producto como un binomio:
2. (n + 2)(n - 2)
3. (r - 5)(r + 5)
4. (2x + 5) (2x - 5)
5. (4y + 1) (4y - 1)
6. (3s - 2) (3s + 2)
7. (a - 2b) (a + 2b)
8. Factorizar las diferencias de cuadrados perfectos:
9. a elevado a la 2 menos 1 
10. 36 x elevado a la 2 menos 25 y elevado a la 2 
11. 169 m elevado a la 2 menos 196 n elevado a la 2 
12. 121 h elevado a la 2 menos 144 k elevado a la 24
13. 1 menos 100 x elevado a la 2 
14. a elevado a la 6 menos 9 b elevado a la 2 
15. m elevado a la 8 menos  n elevado a la 2 
16. a elevado a la 4 b elevado a la  6 menos c elevado a la 2 
17. d elevado a la 14 menos x elevado a la 2 y elevado a la 2 
18. 9 sobre 25 a elevado a la 2 menos 49 sobre 36 b elevado a la 2 
19. 0,0 1 x elevado a la 2 menos 0 , 0009 y elevado a la 2 
20. 1 sobre 256 x elevado a la 2 menos 1 sobre 25 y elevado a la 12 
21. x elevado a la 2 menos 144 
22. 9 a elevado a la 2 menos 441 b elevado a la 2 
23. 36 a elevado a la 2 b elevado a la 8 menos 16 x elevado a la 2 
24. 9 m elevado a la 4 n elevado a la 6 menos 100 
25. 4 x elevado a la 2 menos 64 y elevado a la 8 
26. 121 x elevado a la 4 y elevado a la 10 menos 25 m elevado a la 8 
27. 36 sobre 25 a elevado a la 2 menos 25 sobre 9 b elevado a la 8 
28. La regla empleada en los ejemplos anteriores es aplicable a las diferencias de cuadrados en que uno o ambos cuadrados son expresiones compuestas. Por ejemplo:

(m menos x) elevado a la 2 menos (3 m menos 2 x) elevado a la 2  = [(m - x) + (3m - 2x)] [(m - x) - (3m - 2x)] = (4m - 3x) (-2m + x)

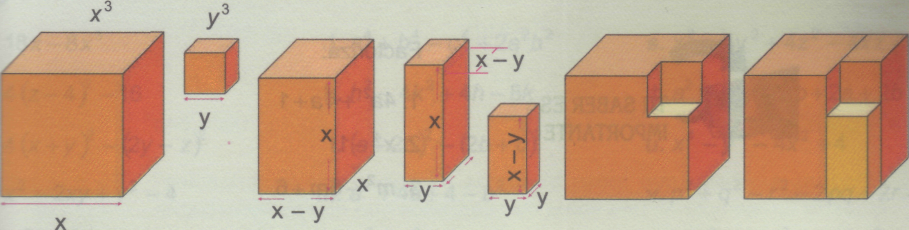
De acuerdo al ejemplo, factoriza:

1. (a menos b ) elevado a la 4 menos c elevado a la 2 
2. (5 m mas n ) elevado a la 2 menos ( 3 m menos 2 n) elevado a la 2 
3. (t menos 2 x) elevado a la 2 menos (5 t menos x) elevado a la 2 
4. n elevado a la 8 menos ( 3 x menos n elevado a la 2) elevado a la 2
5. 1 menos 100 ( x menos y ) elevado a la 2 
6. (x elevado a la 2 menos y elevado a la 2) elevado a la 2 menos ( x elevado a la 4 menos y elevado a la 2) elevado a la 4 
7. (1 menos m ) elevado a la 2 menos ( 1 mas m) elevado a la  2 
8. 169 m elevado a la 2  menos ( m menos n) elevado a la 2 
9. ( s mas 3 t elevado a la 2 ) elevado a la 2 menos (s menos 3 t ) elevado a la  2
10. (1 mas x ) elevado a la 2 menos x elevado a la 2 
11. Factoriza los siguientes binomios:
12. a elevado a la 3 menos b elevado a la 3 
13. a elevado a la 3 mas b elevado a la 3 
14. a elevado a la  3 mas 1 
15. a elevado a la 3 menos 1 
16. a elevado a la 6 menos b elevado a la 6 
17.  a elevado a la 15 mas b elevado a la 9 
18. m elevado a la 18 mas n elevado a la 21 
19. 1 menos z elevado a la 15 
20. 512 m elevado a la 3 menos 64 p elevado a la 3 
21. 1000 h elevado a la 3 mas 27 k elevado a la 3 
22. x elevado a la 3 sobre 8 menos 1 sobre 27 
23. 448 a elevado a la 4 menos 7 a b elevado a la 3 
24. 8 a elevado a la 3 sobre 125 menos 64 b elevado a la 12 sobre 343 
25. x elevado a la 4 y menos x y elevado a la 4 
26. m elevado a la 5 mas m elevado a la 2 n elevado a la 3 
27. c elevado a la 4 d elevado a la 2 menos 8 c d elevado a la 5 
28. 27 p elevado a la 5 q menos 8 p elevado a la 2 q elevado a la 4 
29. 343 a elevado a la 3 sobre 2 menos 125 b elevado a la 3 sobre 3 
30. 125 r s a elevado a la 3 sobre 3 menos  512 s r b elevado a la 3  sobre 3 
31. 81 m elevado a la 3 menos 648 n elevado a la 3 
32. Factoriza, si es posible, los siguientes binomios:
33. v elevado a la 5 menos 25 
34. x elevado a la 2 menos 81 
35. 9 x elevado a la 2 menos 4 
36. 4 m elevado a la 2 menos 1 
37. x elevado a la 2 mas 49 
38. y elevado a la 2 mas 64 
39. 9 x elevado a la 2 menos 16 y elevado a la 2 
40. 25 u elevado a la 2 menos 4 v elevado a la 2 
41. x elevado a la 3 mas 1 
42. y elevado a la 3 menos 1 
43. m elevado a la 3 menos n elevado a la 3 
44. p elevado a la 3 mas q elevado a la 3  
45. 8 x elevado a la 3 mas 27 
46. u elevado a la 3 menos 8 v elevado a la 3 
47. 6 u elevado a la 2 v elevado a la 2 menos 3 u v elevado a la 3 
48. 27 x elevado a la 3 y menos 6 x elevado a la 2 y elevado a la 3 
49. 27 x elevado a la 3 y menos 6 x elevado a la 2 y elevado a la 3 
50.  3 y elevado a la 2 MENOS  27 
51. 2 x elevado a la 3 mas 8 x 
52. 3 x elevado a la 4 mas 27 x elevado a la 2 
53. 12 x elevado a la 3 menos 3 x y elevado a la 2 
54. 2 u elevado a la 3 v menos 2 u v elevado a la 3 
55. 2 x elevado a la 4 mas 2 x 
56.  x y elevado a la 3 mas x elevado a la 4 
57. x elevado a la 2 y elevado a la 2 menos 16 
58. t elevado a la 8 menos 100 
59. Factoriza los trinomios si es posible:
60. 6x elevado a la 2 + 36x + 48
61. 4x elevado a la 3 y + 14x elevado a la 2 y elevado a la 2  + 6xy elevado a la 3 
62. 3x elevado a la 3 y – 15x elevado a la 2 y elevado a la 2  + 18x y elevado a la 3 
63. 60x elevado a la 2 y elevado a la 2  - 200x y elevado a la 3 - 35y elevado a la 4 
64. 60x elevado a la 4  + 68x elevado a la 3 y - 16x elevado a la 2 y elevado a la 2 
65. 4x elevado a la 2  - 4x – 24
66. 3x elevado a la 3 - 6x + 15
67. 2x elevado a la 3  - 2x elevado a la 2  + 8x
68. x elevado a la 4  - 3x elevado a la 2  - 4
69. x elevado a la 4  - 7x elevado a la 2  - 18
70. 2x elevado a la 2  - 2x – 12
71. 2x elevado a la 2  2x elevado a la 3  - 8x
72. Factoriza si es posible
73. 4 u elevado a la 3 mas 32 v elevado a la 3 
74. 54 x elevado a la 3 menos 2 y elevado a la 3 
75. xy mas 2x mas y elevado a la 2 mas 2 y 
76. x elevado a la 2 menos 3 x menos x y mas 3 y 
77. (x menos 3) elevado a la 2 menos 16 y elevado a la 2 
78. (x mas 2 ) elevado a la 2 menos 9 y elevado a la 2 
79. (a menos b) elevado a la 2 menos 4 ( c menos d) elevado a la 2 
80. (x elevado a la 2 menos x) elevado a la 2 menos 9 ( y elevado a la 2 menos y ) elevado a la 2 
81. 25 ( 4 x elevado a la 2 menos 12 x y mas 9 y elevado a la 2)  elevado a la 2 menos 9 a elevado a la 2 b elevado a la 2 
82. 25 menos a elevado a la 2 menos 2 a b menos b elevado a la 2 
83. x elevado a la 2 menos 2 x y mas y elevado a la 2 menos 9 
84. 16 x elevado a la 4 menos x elevado a la 2 mas 6 x y menos 9 y elevado a la 2 
85. x elevado a la 4 menos x elevado a la 2 mas 4 x menos 4 
86. m elevado a la 8 menos n elevado a la 10 

### Prepárate para el ICFES

Observa la interpretación geométrica de una diferencia de cubos:

Imagen 53: Secuencias en figuras



**Descripción Imagen:** Cuadrado ( x al cuadrado), cubo (y al cubo), poliedro rectangular de alto y profundidad valor x y de ancho valor x – y, poliedro rectangular de ancho y, profundidad x – y alto x, poliedro rectangular de ancho y profundidad y alto x-y. Cubo formado por la unión de estas figuras, hay una esquina en forma de cubo faltante.

x elevado a la 3 menos y elevado a la 3 igual a ( x menos y ) x elevado a la 2 mas ( x menos y) x y mas (m menos y) y elevado a la 2 

igual a ( x menos y ) ( x elevado a la 3 mas x y mas y elevado a la 2 ) 

1. En la ecuación anterior cada uno de los sumandos sugiere:
2. El área de las caras laterales de las cajas que forman la diferencia de cubos
3. La longitud de los lados de las cajas que forman la diferencia de cubos.
4. El volumen de las cajas que forman la diferencia de cubos.
5. El volumen de dos de las cajas y el área de la caja más pequeña.
6. En la deducción anterior se utilizó:
7. Factor común monomio.
8. Factor común polinomio.
9. Factor común por agrupación.
10. Diferencia de cuadrados.

Euclides demostró que sólo podían existir cinco poliedros regulares (llamados "sólidos cósmicos “por los pitagóricos).

El filósofo Platón (428 - 348) admiraba tanto estas figuras que no CURIOSIDADES podía convencerse de que el Creador no las hubiera utilizado, y construyó su representación del mundo tomando esos cinco poliedros como

Elementos primarios:

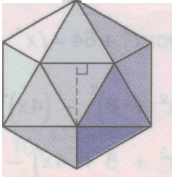
* Aire

**Imagen 54:** Octaedro triangular.

figura formada por 8 triángulos.

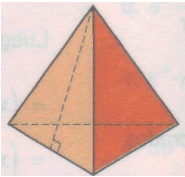

* Agua

**Imagen 55:** Icosaedro triangular



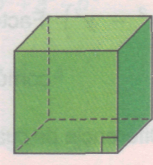
* Fuego

**Imagen 56:** Tetraedro con Triángulo Isósceles.



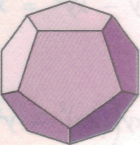
* Tierra

**Imagen 57:** Hexaedro (Cubo con cuadrados)



* Cosmos

**Imagen 58:** Dodecaedro con pentágonos regulares.



## FACTORIZACIÓN CON COMBINACIÓN DE CASOS

Factoriza:

1. 4a elevado a la 2  + 4a + 1
2. x elevado a la 4  - 1
3. m elevado a la 2  - 5m + 6

**Ejemplos:**

1. Factorizar: 4p elevado a la 2  - 4q elevado a la 2  + 4qr - r elevado a la 2 

**Solución:**

Agrupando se tiene:

4p elevado a la 2  - 4q elevado a la 2  + 4qr - r elevado a la 2 

= 4p elevado a la 2  - (4q elevado a la 2  - 4qr + r elevado a la 2 ) Trinomio Cuadrado Perfecto

= (2 p ) elevado a la 2  - ( 2 q menos r ) elevado a la 2 Diferencia de Cuadrados

= [2p + (2q – r)][2p – (2q – r)]

1. Factorizar: 4 x elevado a la 3 y  - x y elevado a la 3 

**Solución**

4x elevado a la 3 y  - x y  elevado a la 3 = xy (4x elevado a la 2  - y elevado a la 2 ) Factor Común

= xy((2 x ) elevado a la 2  - y elevado a la 2 ) Diferencia de cuadrados

= xy(2x – y)(2x + y)

1. **Sumas de cuadrados**

Hay sumas de cuadrados que sumándoles y res­tándoles una misma cantidad pueden llevarse a la diferencia de dos cuadrados.

**Ejemplo:**

Factorizar: x elevado a la 4  + 64

**Solución**

x elevado a la 4  + 64 = (x elevado a la 2 ) elevado a la 2  + 8 elevado a la 2 

Si se suma y resta el doble producto de las raíces cuadradas de los sumandos, o sea:

2 por 8 x elevado a la 2 igual a 16 x elevado a la 2 , se obtiene:

x elevado a la 4 mas 16 x elevado a la 2 mas 64 menos 16 x elevado a la 2 

Luego: x elevado a la 4  + 64 = (x elevado a la 4 mas 16 x elevado a la 2 mas 64) menos 16 x elevado a la 2 

= (x elevado a la 2 mas 8 ) elevado a la 2 menos ( 4 x ) elevado a la 2 

= (x elevado a la 2  + 8 + 4x) (x elevado a la 2  + 8 + 4x)

= (x elevado a la 2  + 4x + 8) (x elevado a la 2  + 4x + 8)

### Practica lo aprendido

1. Factoriza cada una de las siguientes expresiones:
2. 18x - 8x elevado a la 3 
3. 4( z menos 4 ) elevado a la 2  - 16
4. 4(x mas y ) elevado a la 2 menos ( 2 y menos z ) elevado a la 2 
5. x elevado a la 2  - 2xy + y elevado a la 2  - 4
6. m elevado a la 2  - 9n elevado a la 2  + 2m +1
7. a elevado a la 2 
8. 4x elevado a la 2  - 4y elevado a la 2  + 4x + 1
9. m elevado a la 2  -9n elevado a la 2  + 9 - 6m
10. p elevado a la 2 - q elevado a la 2 - 2p + 2q
11. a elevado a la 4  +  b elevado a la  4 - c elevado a la 4 + 2a elevado a la 2 b elevado a la 2 
12. h elevado a la 2  - 4k elevado a la 2  + 4h - 8k
13. (a mas 2 b) elevado a la 2 menos ( 2 b mas c ) elevado a la 2 
14. a elevado a la 2  + 4a + 4 - b elevado a la 2 
15. u elevado a la 2 menos v elevado a la 2 
16. h elevado a la 2 - 4k elevado a la 2 - 4h + 4
17. p elevado a la 2 - q elevado a la 2  + r elevado a la 2  - 2pr
18. 6a elevado a la 2  - 9ab - 15b elevado a la 2 
19. 6ab + 9a elevado a la 2b – 15a elevado a la 3 b 
20. x elevado a la 2  - 4y elevado a la 2  + 4z elevado a la 2  - 4xz
21. a elevado a la 2  + b elevado a la 2  + 2ab + 2a + 2b
22. x elevado a la 4  - y elevado a la 4 - 4x elevado a la 2  + 4
23. p elevado a la 2  + q elevado a la 2 - r elevado a la 2  - 2pq + 2r – 1
24. 15r elevado a la 3  + 20r elevado a la 2 s - 20rs elevado a la 2 
25. 12x elevado a la 2 y  - 36x y elevado a la 2  + 27y elevado a la 3 
26. 5a elevado a la 3  - 15ab
27. 3a elevado a la 3  - 3
28. Factoriza:
29. x elevado a la 2 menos 81 
30. 16 v elevado a la 3 menos 48 v elevado a la 2 w mas 36 v w elevado a la 2 
31. b elevado a la 3 menos 3 b elevado a la 2 menos 16 b menos 48 
32. 32 m elevado a la 5 n menos 48 m elevado a la 3 n w mas 18 m n elevado a la 2 w 
33. s elevado a la 3 t mas 2 s elevado a la 2 t mas s t v elevado a la 2 menos s t w elevado a la 2 
34. 12mn – 4pn +12mp - 4 p elevado a la 2 
35. 4 quintos x elevado a la 2 y elevado a la 3 menos 4 quintos x elevado a la 2 
36. 1 cuarto x elevado a la 4 menos 4 x elevado a la 2 menos 64 
37. 1 octavo x elevado a la 2 y mas 12 x y elevado a la 2 mas 10 y elevado a la 3 
38. ( x elevado a la 2 menos 2 x y ) ( a mas 1) mas y elevado a la 2 ( a mas 1) 
39.  un tercio a elevado a la 2 x menos 4 tercios b elevado a la 2 x mas 2 tercios a elevado a la 2 y menos 8 tercios b elevado a la 2 y 
40. 5 a elevado a la 2 x elevado a la 4 menos 20 sobre 9 a elevado a la 2 
41. 70 m elevado a la 4 mas 26 m elevado a la 3 menos 24 m elevado a la 2 
42. 16 w elevado a la 5 v menos 56 w elevado a la 3 v elevado a la 3 mas 49 w v elevado a la 5 
43. x elevado a la 2 m mas 2 menos x elevado a la 2 y elevado a la 2 n 
44. (x mas y) elevado a la 6 menos 1 
45. a elevado a la 2 menos b elevado a la 2 mas a elevado a la 3 menos b elevado a la 3 
46. x elevado a la 4 menos 3 x elevado a la 2 menos 4 
47. 5 a elevado a la 5 mas 3 a elevado a la 3 mas  3 a 

El álgebra sirve, entre muchas otras cosas, para describir las leyes del movimiento que relacionan la distancia que recorre un objeto (S) y el tiempo transcurrido (t).

**Velocidad**

Distancia recorrida por unidad de tiempo. Esta velocidad será positiva si el objeto se aleja, y negativa si se acerca al de partida.

Si durante un intervalo de tiempo t, un objeto mantiene una velocidad constante, la distancia recorrida será:

S = vt

**Aceleración**

Cambio de velocidad por unidad de tiempo. Esta aceleración será positiva si el objeto aumenta su velocidad y negativa si frenando disminuye su velocidad, es decir, si tiene el sentido opuesto al de la velocidad inicial.

Si durante un intervalo de tiempo t, un objeto tiene una aceleración constante a, la velocidad adquirida será:

v = at

### Prepárate para el ICFES

Medir para creer

En Europa, en el siglo XVI, Galileo fue el primero en comprender que uno no se puede limitar a observar la naturaleza. Es preciso hacer experimentos para eliminar efectos secundarios que complican el problema, es necesario medir para obtener datos numéricos y deducir leyes matemáticas.

Para estudiar la caída de los cuerpos, Galileo ideó un ingenioso sistema para reducir los efectos del aire y realizar mediciones de tiem­po. Con gran paciencia, construyó largas y li­sas canaletas de madera por las que hizo ro­dar esferas como bolas de billar. Seguía sien­do un movimiento de caída, pero simplificaba su observación. Era más lento y disminuía la resistencia del aire. Ello le permitió medir el tiempo empleando su pulso como reloj.

Galileo observó entonces, que bajo la acción de la fuerza constante de gravedad (el peso), las esferas no mantenían su velocidad, sino que, a medida que avanzaba el tiempo iban adquiriendo una velocidad mayor, es decir, su movimiento se aceleraba.

La aceleración, entonces, mide el cambio en la velocidad por unidad de tiempo:

Aceleración= variación de la velocidad sobre tiempo transcurrido

1. El texto pretende mostrar:
2. La importancia de la experimentación.
3. El concepto de aceleración.
4. El cálculo de la aceleración de la gravedad.
5. La deducción de una ley física.
6. Una bola de billar después de 10 segun­dos de estar bajando por la canaleta tiene una velocidad de 60 metros por segundo. Su aceleración, medida en ese instante, es:
7. 6
8. 0,6
9. 50
10. Ninguna de las anteriores.

## BILBIOGRAFÍA

* + - 1. Supermat
      2. Dimensión Matemática.