Logo Ministerio de educación



MODULO DE MATEMÁTICAS: SEXTO GRADO

# TABLA DE CONTENIDO

[TEMA 1: LÓGICA Y CONJUNTOS 5](#_Toc421722343)

[1.1 PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS 6](#_Toc421722344)

[Práctica lo aprendido 8](#_Toc421722345)

[1.2 SÍMBOLOS PARA LAS PROPOSICIONES 12](#_Toc421722346)

[Práctica lo aprendido 13](#_Toc421722347)

[1.3 LA CONJUNCIÓN 14](#_Toc421722348)

[Práctica lo aprendido: 17](#_Toc421722349)

[1.4 LA CONJUNCIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS 19](#_Toc421722350)

[Práctica lo aprendido 22](#_Toc421722351)

[1.5 LA DISYUNCIÓN 28](#_Toc421722352)

[Práctica lo aprendido 33](#_Toc421722353)

[1.6 LA DISYUNCIÓN LÓGICA Y LA UNIÓN DE CONJUNTOS 35](#_Toc421722354)

[Práctica lo aprendido 38](#_Toc421722355)

[1.7 NEGACIÓN 41](#_Toc421722356)

[Práctica lo aprendido 43](#_Toc421722357)

[1.8 COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO 46](#_Toc421722358)

[Práctica lo aprendido 49](#_Toc421722359)

[1.9 LA IMPLICACIÓN 51](#_Toc421722360)

[Práctica lo aprendido 58](#_Toc421722361)

[1.10 INCLUSIÓN DE CONJUNTOS 61](#_Toc421722362)

[Práctica lo aprendido 71](#_Toc421722363)

[1.11 PROPOSICIONES EQUIVALENTES Y CONJUNTOS IGUALES 75](#_Toc421722364)

[Práctica lo aprendido 80](#_Toc421722365)

[TEMA 2. SISTEMAS DE NUMERACIÓN 83](#_Toc421722366)

[2.1 SISTEMA DE NUMERACIÓN ROMANO 83](#_Toc421722367)

[Práctica lo aprendido 87](#_Toc421722368)

[2.2 SISTEMA DE NUMERACIÓN BINARIO 89](#_Toc421722369)

[Práctica lo aprendido 94](#_Toc421722370)

[2.3 SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL 96](#_Toc421722371)

[Práctica lo aprendido 102](#_Toc421722372)

[TEMA 3: OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES 107](#_Toc421722373)

[3.1 ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES 107](#_Toc421722374)

[3.2 SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES 108](#_Toc421722375)

[Práctica lo aprendido 112](#_Toc421722376)

[3.3 MULPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES 116](#_Toc421722377)

[3.3.1 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES 116](#_Toc421722378)

[3.3.2 MULTIPLICACIONES ABREVIADAS 118](#_Toc421722379)

[Práctica lo aprendido 122](#_Toc421722380)

[3.4 DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES 127](#_Toc421722381)

[Práctica lo aprendido 132](#_Toc421722382)

[3.5 SOLUCIÓN DE EXPRESIONES ARITMÉTICAS 137](#_Toc421722383)

[Práctica lo aprendido 143](#_Toc421722384)

[3.6 POTENCIACIÓN EN LOS NATURALES 149](#_Toc421722385)

[3.6.1 CUADRADOS Y CUBOS PERFECTOS 151](#_Toc421722386)

[POTENCIAS DE 10 154](#_Toc421722387)

[3.6.2 PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN 155](#_Toc421722388)

[3.6.3 EL CERO Y EL UNO EN LA POTENCIACIÓN 157](#_Toc421722389)

[3.6.4 EXPRESIONES CON POTENCIAS 159](#_Toc421722390)

[Práctica lo aprendido 161](#_Toc421722391)

[3.7 RADICACIÓN EN LOS NATURALES 168](#_Toc421722392)

[3.7.1 PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN 170](#_Toc421722393)

[3.7.2 EL CERO Y EL UNO EN LA RADICACIÓN 171](#_Toc421722394)

[3.7.3 EXPRESIONES CON RAÍCES 172](#_Toc421722395)

[Práctica lo aprendido 173](#_Toc421722396)

[3.8 LOGARITMACIÓN EN LOS NATURALES 176](#_Toc421722397)

[3.8.1 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS 178](#_Toc421722398)

[3.8.2 EL CERO Y EL UNO EN LA LOGARITMACIÓN 179](#_Toc421722399)

[Práctica lo aprendido 181](#_Toc421722400)

[TEMA 4: TEORÍA DE NÚMEROS 185](#_Toc421722401)

[4.1 MÚLTIPLOS 185](#_Toc421722402)

[Práctica lo aprendido 189](#_Toc421722403)

[4.2 DIVISORES 191](#_Toc421722404)

[Práctica lo aprendido 195](#_Toc421722405)

[4.3 CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD 197](#_Toc421722406)

[Práctica lo aprendido 200](#_Toc421722407)

[4.4 NÚMEROS PRIMOS 203](#_Toc421722408)

[Práctica lo aprendido 205](#_Toc421722409)

[4.5 DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS 207](#_Toc421722410)

[Práctica lo aprendido 210](#_Toc421722411)

[4.6 MÁXIMO COMÚN DIVISOR PENSAMIENTO NUMÉRICO 213](#_Toc421722412)

[Práctica lo aprendido 220](#_Toc421722413)

[4.7 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO 223](#_Toc421722414)

[Práctica lo aprendido 229](#_Toc421722415)

[Tabla 1: Juegos Panamericanos 1975 8](#_Toc421722230)

[Tabla 2: Conectivos Lógicos 12](#_Toc421722231)

[Tabla 3: Periódico Mural 13](#_Toc421722232)

[Tabla 4: Conjunción de proposiciones. 15](#_Toc421722233)

[Tabla 5: Disyunción 16](#_Toc421722234)

[Tabla 6: Valor de la conjunción 16](#_Toc421722235)

[Tabla 7: Producción mundial de café 17](#_Toc421722236)

[Tabla 8: Producción de café 21](#_Toc421722237)

[Tabla 9: Conjunción. 25](#_Toc421722238)

[Tabla 10: Presidentes de Colombia desde 1934 a 1962 26](#_Toc421722239)

[Tabla 11: Interesados en Ingresar 27](#_Toc421722240)

[Tabla 12: Condiciones de alumnos. 29](#_Toc421722241)

[Tabla 13: Disyunción 31](#_Toc421722242)

[Tabla 14: Disyunción de s y t 32](#_Toc421722243)

[Tabla 15: Preinscritos a basquetbol 34](#_Toc421722244)

[Tabla 16: Disyunción según datos. 34](#_Toc421722245)

[Tabla 17: Represas más grandes del mundo. 38](#_Toc421722246)

[Tabla 18: Vitaminas Solubles en Agua 39](#_Toc421722247)

[Tabla 19: Producción de Egipto 43](#_Toc421722248)

[Tabla 20: Negación. 45](#_Toc421722249)

[Tabla 21: Encuesta a compañeros 50](#_Toc421722250)

[Tabla 22: Conclusión de los comportamientos. 51](#_Toc421722251)

[Tabla 23: Implicación 53](#_Toc421722252)

[Tabla 24: Valor de verdad de la implicación 59](#_Toc421722253)

[Tabla 25: Porcentaje de analfabetismo 1980 60](#_Toc421722254)

[Tabla 26: Clasificación de los vegetales. 71](#_Toc421722255)

[Tabla 27: Clasificación de los animales. 71](#_Toc421722256)

[Tabla 28: Símbolos en números romanos. 84](#_Toc421722257)

[Tabla 29: Errores en la escritura. 86](#_Toc421722258)

[Tabla 30: Identificación de mayor y menor. 88](#_Toc421722259)

[Tabla 31: Transformación de Binario a decimal. 92](#_Toc421722260)

[Tabla 32: Valor de posición en el Sistema Decimal 97](#_Toc421722261)

[Tabla 33: Números en sistema decimal. 99](#_Toc421722262)

[Tabla 34: Número ubicado en el sistema decimal 102](#_Toc421722263)

[Tabla 35: Datos del Sol 103](#_Toc421722264)

[Tabla 36: Área de los países 104](#_Toc421722265)

[Tabla 37: Propiedades de la Adición. 108](#_Toc421722266)

[Tabla 38: Propiedades de la Sustracción. 110](#_Toc421722267)

[Tabla 39: Textos Escolares. 111](#_Toc421722268)

[Tabla 40: Electrodomésticos 115](#_Toc421722269)

[Tabla 41: Propiedades de la multiplicación. 117](#_Toc421722270)

[Tabla 42: Longitud de las Pistas 120](#_Toc421722271)

[Tabla 43: Indicación de Operaciones 123](#_Toc421722272)

[Tabla 44: Alimentos 124](#_Toc421722273)

[Tabla 45: Bebidas 124](#_Toc421722274)

[Tabla 46: Partes del Proceso de División. 133](#_Toc421722275)

[Tabla 47: Partes del estado de cuenta 137](#_Toc421722276)

[Tabla 48: Extracto Bancario 140](#_Toc421722277)

[Tabla 49: Compras de Esteban 142](#_Toc421722278)

[Tabla 50: Partes de una Potenciación. 150](#_Toc421722279)

[Tabla 51: Solución de las partes de un proceso de potenciación. 151](#_Toc421722280)

[Tabla 52: Cuadrados Perfectos. 152](#_Toc421722281)

[Tabla 53: Cubos Perfectos. 153](#_Toc421722282)

[Tabla 54: Partes de una potenciación. 162](#_Toc421722283)

[Tabla 55: Distancias a la tierra 166](#_Toc421722284)

[Tabla 56: Partes de la potenciación. 169](#_Toc421722285)

[Tabla 57: Partes de la Radicación. 174](#_Toc421722286)

[Tabla 58: Relación entre otras operaciones. 178](#_Toc421722287)

[Tabla 59: Solución de la relación. 178](#_Toc421722288)

[Tabla 60: Ejercicio de partes del logaritmo 182](#_Toc421722289)

[Tabla 61: Divisores 195](#_Toc421722290)

[Tabla 62: Selección de Divisores 200](#_Toc421722291)

[Tabla 63: Criba de Eratóstenes 204](#_Toc421722292)

[Tabla 64: Números Primos 204](#_Toc421722293)

[Tabla 65: Primos y Compuestos. 206](#_Toc421722294)

[Tabla 66: Identificación de Divisores. 212](#_Toc421722295)

[Tabla 67: Largo y Ancho de Pistas. 221](#_Toc421722296)

[Tabla 68: Organización de Símbolos. 230](#_Toc421722297)

[Imagen 1: Diagrama de requisitos. 20](#_Toc421722416)

[Imagen 2: Intersección. 21](#_Toc421722417)

[Imagen 3: Niño 1. 24](#_Toc421722418)

[Imagen 4: Niño 2 24](#_Toc421722419)

[Imagen 5: Niño 3 25](#_Toc421722420)

[Imagen 6: Niño 4. 25](#_Toc421722421)

[Imagen 7: Diagrama de Conjuntos P y Q 36](#_Toc421722422)

[Imagen 8: Vestido 42](#_Toc421722423)

[Imagen 9: Conjunto J 47](#_Toc421722424)

[Imagen 10: Complemento de J 48](#_Toc421722425)

[Imagen 11: Conjunto por género. 49](#_Toc421722426)

[Imagen 12: Subconjunto 56](#_Toc421722427)

[Imagen 13: Subconjunto de un subconjunto 56](#_Toc421722428)

[Imagen 14: Elemento de un subconjunto de un subconjunto de un conjunto. 57](#_Toc421722429)

[Imagen 15: Elemento del subconjunto P. 58](#_Toc421722430)

[Imagen 16: Subconjunto de futbolistas. 62](#_Toc421722431)

[Imagen 17: Subconjunto América en el de Futbolistas. 62](#_Toc421722432)

[Imagen 18: Subconjunto P del subconjunto V en U 63](#_Toc421722433)

[Imagen 19: Elementos en conjuntos Intersecantes. 64](#_Toc421722434)

[Imagen 20: Conjuntos Intersecantes. 66](#_Toc421722435)

[Imagen 21: Conjuntos Disyuntos. 66](#_Toc421722436)

[Imagen 22: Subconjuntos de subconjuntos 74](#_Toc421722437)

[Imagen 23: 19 a binario 90](#_Toc421722438)

[Imagen 24: 32 a binario 91](#_Toc421722439)

[Imagen 25: Proceso de Suma 94](#_Toc421722440)

[Imagen 26: Multiplicación de Binarios 94](#_Toc421722441)

[Imagen 27: Proceso de División Inexacta. 128](#_Toc421722442)

[Imagen 28: 27 dividido 4 128](#_Toc421722443)

[Imagen 29: Cuadrado de 7 154](#_Toc421722444)

[Imagen 30: Cubo de 3 154](#_Toc421722445)

[Imagen 31: Cuadrado de 5 164](#_Toc421722446)

[Imagen 32: Cubo de 5 164](#_Toc421722447)

[Imagen 33: Descomposición del 60. 208](#_Toc421722448)

[Imagen 34: Descomposición del 525 209](#_Toc421722449)

[Imagen 35: Obtención mcd entre 12, 18 y 24 214](#_Toc421722450)

[Imagen 36: Descomposición de 36 y 42 215](#_Toc421722451)

[Imagen 37: Descomposición del 30, 45 y 60. 216](#_Toc421722452)

[Imagen 38: Descomposición de 18, 27, 45. 217](#_Toc421722453)

[Imagen 39: Descomposición del 16, 64 y 80. 218](#_Toc421722454)

[Imagen 40: Descomposición del 4, 8 y 12. 224](#_Toc421722455)

[Imagen 41: Descomposición del 20, 30 y 45. 225](#_Toc421722456)

[Imagen 42: Descomposición del 16, 24, 80 y 120. 226](#_Toc421722457)

[Imagen 43: Descomposición del 10, 12 y 15. 227](#_Toc421722458)

[Imagen 44: Descomposición del 12, 24 y 60. 228](#_Toc421722459)

# TEMA 1: LÓGICA Y CONJUNTOS

**OBJETIVOS:**

1. Analizar proposiciones simples y compuestas, y hallar el valor de verdad de las proposiciones.
2. Distinguir las proposiciones abiertas y las proposiciones cerradas.
3. Establecer algunas relaciones entre los conectivos y las operaciones

**INTRODUCCIÓN:**

En esta unidad se trata de presentar la lógica y los conjuntos como un lenguaje unificador en el estudio de la matemática. Es importante tener en cuenta cómo la lógica nos sirve también para ayudar a las demás ciencias a formular razonamientos válidos, aplicando un lenguaje sim­bólico y una serie de reglas para manejarlo.

## PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS

En tu primer curso Aritmética y Geometría ya conociste algunos con­ceptos de lógica y sabes que esta ciencia ayuda a las demás a formular razonamientos válidos, aplicando un lenguaje simbólico y una serie de reglas para manejarlo.

Además ya usaste proposiciones (las expresiones que pueden ser calificadas como falsas o como verdaderas) y sabes, que así como la aritmética opera con números, la lógica opera con proposiciones.

Por ejemplo:

Si tenemos dos proposiciones, las cuales a lo largo de este texto se escribirán entre comillas, sin embargo existen textos en los que no se utiliza esta notación:

* p: "Está lloviendo"
* q: "Hay mucho tráfico"

Las simbolizamos con las letras minúsculas: p, q y podemos operar con ellas para obtener una nueva proposición:

* p y q: "Está lloviendo y hay mucho tráfico".

Así decimos que operar con proposiciones significa que, a partir de proposiciones dadas, podemos obtener una nueva proposición; esta nueva proposición recibe el nombre de proposición compuesta; por ejemplo, son proposiciones compuestas:

* p y q: "Está lloviendo y hay mucho tráfico"
* p o q: "Está lloviendo o hay mucho tráfico "
* Si p entonces q: "Si está lloviendo, entonces hay mucho tráfico"
* q si y sólo si p: "Está lloviendo si y sólo si hay mucho tráfico"
* no p: "No está lloviendo"
* no q: "No hay mucho tráfico"

Recuerda que las proposiciones tienen sólo un valor de verdad: fal­so que simbolizamos F o 0, o verdadero, que simbolizamos V o 1

* m: "2 + 3 = 5"

m es verdadera.

* n: "5<3"

n es falsa

El valor de verdad de las proposiciones compuestas depende de la calificación de las proposiciones simples que la forman, por ejemplo:

1. m o n

* m es verdadera.
* n es falsa
* m o n es verdadera

1. m y n

* m es verdadera
* n es falsa
* m y n es falsa

### Práctica lo aprendido

1. Si tenemos las proposiciones:

* m: "Brasil es un país productor de café"
* n: "Venezuela produce petróleo"
* r: "Cuba es un país productor de caña de azúcar"
* s: "México es un país productor de plata"

Traduce las siguientes proposiciones a un lenguaje común:

1. m o s
2. n o s
3. r y s
4. Considera la información del siguiente cuadro, y de acuerdo con ella califica las proposiciones siguientes, escribiendo (V) a las verdaderas y (F) a las falsas.

Tabla 1: Juegos Panamericanos 1975

| País | Oro | Plata | Bronce | Total |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Estados Unidos | 118 | 83 | 37 | 247 |
| Cuba | 57 | 46 | 31 | 134 |
| Canadá | 18 | 34 | 39 | 91 |
| México | 9 | 13 | 38 | 60 |
| Brasil | 6 | 14 | 23 | 43 |

1. Brasil obtuvo 30 medallas de oro.
2. Cuba obtuvo 134 me dallas en total.
3. Brasil obtuvo menos de 44 medallas y más de 42.
4. Cuba obtuvo el segundo lugar por el total de medallas.
5. México obtuvo el cuarto lugar por el total de medallas.
6. México obtuvo más medallas de bronce que Cuba.
7. Todos los países del cuadro son americanos
8. 34 > 60
9. 43 < 91
10. Escribe (S) en el paréntesis que corresponda a las proposiciones simples y (C) a las compuestas.
11. (C) Si es país del cuadro, entonces es americano.
12. () México obtuvo 9 medallas de oro y 38 de bronce.
13. () Los países que participan en los Juegos Panamericanos son latinoa­mericanos o norteamericanos.
14. () Si es país americano, entonces participa en los Juegos Panamerica­nos.
15. () Canadá obtuvo 34 medallas de plata.
16. () Se obtiene medalla de oro si y sólo si se gana el primer lugar.
17. () 38>31
18. () 43 < 44 y 43 > 42
19. () Cuba fue el país latinoamericano que obtuvo mayor número de medallas.

A las proposiciones como p: "Está lloviendo", q, m, n,. . . etc., las llamamos proposiciones simples. A las nuevas proposiciones formadas con las simples: p y q, p o q, si p entonces q,. . . etc., las llamamos proposiciones compuestas.

Son ejemplos de proposiciones simples:

* a: "El río Nilo está en África"
* b: "Los egipcios fueron los primeros en usar símbolos para repre­sentar los números"
* c: "2 + 3= 5"
* d: "5>3"

Son ejemplos de proposiciones compuestas:

* a y b: "El río Nilo está en África y los egipcios fueron los primeros en usar símbolos para representar los números"
* c o d: "2 + 3= 5ó5>3"
* Si c entonces d: "Si 2 + 3=5 entonces 5 > 3"

1. Resuelve el ejercicio siguiente:
2. Escribe cinco proposiciones simples.
3. De acuerdo con las proposiciones simples que escribiste, fórmula ahora las proposiciones compuestas siguientes.

* a y b:
* a o d:
* Si c entonces d:
* d si y sólo si e:
* d y e:

1. Observa las proposiciones que formulaste en el ejercicio anterior. ¿Cómo formulaste las proposiciones compuestas?

Como ves, las proposiciones compuestas se forman con proposiciones simples y unas partículas gramaticales que las unen, por ejemplo:

* "Pedro estudia y trabaja". Se forma con las proposiciones simples: Pedro estu­dia, Pedro trabaja y con la partícula "y".

1. Completa:
2. "Pedro estudia o trabaja":

* Se forma con las proposiciones simples:
* Con la partícula:

1. "Si está lloviendo, entonces hay mucho tráfico":

* Se forma con las proposiciones simples:
* Con las partículas:

A las partículas "y" "o" "si... entonces" "si y sólo si" que usamos para for­mar proposiciones compuestas, se les llama conectivos.

1. Si tenemos las proposiciones:

* a: "Los egipcios vivieron a orillas del Nilo"
* b: "El río Nilo está en África"
* c: "La egipcia fue una de las primeras culturas que se conocen"
* p: "2 es número par"
* q: "2 es primo"

Escribe en lenguaje común:

1. a y b:
2. Si b entonces a:
3. P o q:
4. Si p entonces q:
5. Selecciona las proposiciones simples que escribiste, y los conec­tivos que empleaste.

## SÍMBOLOS PARA LAS PROPOSICIONES

Como afirmamos al principio, en la lógica se emplea un lenguaje simbólico, como es el escribir letras minúsculas en lugar de las proposiciones completas.

En lugar de los conectivos y, o,. . . etc., también usamos signos convencionales:

Tabla 2: Conectivos Lógicos

| Conectivo | Símbolo |
| --- | --- |
| Y |  |
| O |  |
| Sí . . . entonces |  |
| Si y sólo si |  |
| No |  |

Así que:

* p y q, se escribe p  q
* p o q, se escribe p  q
* Si p, entonces q, se escribe p  q
* p si y sólo si q, se escribe p  q

Así que las proposiciones:

1. "Juan estudia y trabaja", se puede traducir como: p  q
2. "Juan estudia o trabaja", se puede traducir como: p  q
3. "Si Juan estudia, entonces trabaja": p  q
4. "Juan estudia si y sólo si trabaja": p  q

### Práctica lo aprendido

1. Escribe tres proposiciones simples:
2. r
3. s
4. t
5. De acuerdo con las proposiciones que escribiste, traduce:
6. r  s
7. r  s
8. s  t
9. t  j
10. r  s
11. s  r
12. r  t
13. r  s

## LA CONJUNCIÓN

En la escuela secundaria "Juan del Corral", se organizaron varios clu­bes deportivos y artísticos.

Para ingresar a cada uno se deben cumplir ciertos requisitos, que se dieron a conocer en el periódico mural de la escuela.

Tabla 3: Periódico Mural

| CLUBES | REQUISITOS |
| --- | --- |
| Basquetbol | * Ser alumno del colegio * Grado octavo * Medir más de 1,60 |
| Danza Regional | Sin requisitos adicionales. |

Varios de los muchachos se han animado a inscribirse en el club de basquetbol:

1. Arturo que es alumno de 8º. y mide 1,67
2. Beto que es alumno de 8º. y mide 1,59
3. Carlos que es alumno de 7º. y mide 1,63
4. Daniel que es alumno de 7º. y mide 1,60

¿Crees que acepten a los cuatro?

Observa que cada una de las expresiones anteriores es una proposi­ción compuesta, en la que hemos usado el conectivo "y".

Pues bien, a estas proposiciones compuestas las llamamos: conjun­ciones.

Son conjunciones:

* Arturo es alumno de 8º. y mide 1,67
* Beto es alumno de 8º. y mide 1,59
* Carlos es alumno de 7º. y mide 1,63
* Daniel es alumno de 7º. y mide 1,60

¿Cuál de los cuatro amigos será aceptado en el club de basquetbol? de acuerdo con las condiciones:

Llena la tabla siguiente, escribiendo si cada alumno cumple con los requisitos:

* p(x): "x es alumno de 8º”
* q(x): "x mide más de 1,60"

p(x)  q(x)

Tabla 4: Conjunción de proposiciones.

| Nombre | p(x) | q(x) | p(x)q(x) |
| --- | --- | --- | --- |
| Arturo |  |  |  |
| Beto | sí | no |  |
| Carlos |  |  |  |
| Daniel |  |  |  |

Observa en la tabla que el valor de verdad de una conjunción depen­de de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman. En uno de los ejemplos anteriores teníamos las proposiciones:

* p: "Está lloviendo"
* q: "Hay mucho tráfico"

p(x)  q(x): "Está lloviendo y hay mucho tráfico"

Observa las descripciones siguientes:

1. Hay mucho trancón. Está lloviendo

* p: Verdadera
* q: Verdadera
* p(x)  q(x): Verdadera

En los ejemplos anteriores podemos observar que:

Una conjunción es verdadera sólo si las dos proposiciones que la forman son verdaderas; en cualquier otro caso es falsa.

Si representamos los valores de verdad mediante los símbolos 1 y 0 se puede determinar la siguiente:

Tabla 5: Disyunción

| P | q | p(x)  q(x) |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Si aplicamos la tabla presentada, podemos calificar junción, por ejemplo:

Si tengo la conjunción:

m  n: "La religión egipcia era politeísta y Amón es un dios azteca". Analizo los valores de m y de n:

* m: Verdadero
* n: Falsa

Entonces m  n: Falso

De acuerdo con el segundo renglón de la tabla de la conjunción:

Tabla 6: Valor de la conjunción

| m | n | m  n |
| --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 |

### Práctica lo aprendido:

1. Observa la siguiente tabla:

Tabla 7: Producción mundial de café

| PAÍS | CONTINENTE | TONELADAS |
| --- | --- | --- |
| Brasil | América | 600 |
| Colombia | América | 408 |
| Costa de Marfil | África | 204 |
| Uganda | África | 179 |
| Angola | África | 177 |
| México | América | 108 |
| Indonesia | Asia | 111 |
| Salvador | América | 104 |

1. De acuerdo con las condiciones anotadas, determina el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

p: "El primer país productor de café, es americano"

q: "Los países africanos producen más de 700 toneladas de café"

r: "México ocupa el sexto lugar como país productor de café"

s: "Los países asiáticos no producen café"

1. Califica las proposiciones compuestas (usía tu tabla de verdad)

* p  q
* p  r
* r  q
* p  s
* s  r
* q  s

1. Escribe las proposiciones que se indican en un lenguaje común, tomando como base las proposiciones p, q, r, del cuadro de las medallas de los Juegos Paname­ricanos de 1975.

* p: "México obtuvo 1 3 medallas de plata"
* q: "México obtuvo 39 medallas de bronce"
* r: "México obtuvo 200 medallas en total"

1. p  r
2. q  r:
3. r
4. q  r
5. p q
6. q  r
7. Identifica las proposiciones simples y los conectivos que localices en el párrafo siguiente:

México conquistó medalla de plata en basquetbol femenino y medalla de oro en waterpolo. En fútbol luchó por la medalla de oro o la de plata. Si hubiera ganado a Cuba en béisbol entonces hubiese obtenido medalla de bronce.

## LA CONJUNCIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Volvamos a nuestro ejemplo anterior: el club de basquetbol.

Si tenemos como universo los alumnos de la escuela secundaria "Juan del Corral" de la ciudad de Bogotá sabemos que para formar el club de basquetbol tenemos las proposiciones abiertas:

* p(x): "x es alumno de 8º."
* q(x): "x mide más de 1,60"

A partir de esas proposiciones se determinan los conjuntos:

P = {x tales que x es alumno de 8º}

Q = {x tales que x mide más de 1,60}

Que gráficamente estarían representados:

Imagen 1: Diagrama de requisitos.

Diagrama rectangular con los conjuntos de los requisitos para inscripción en baloncesto.

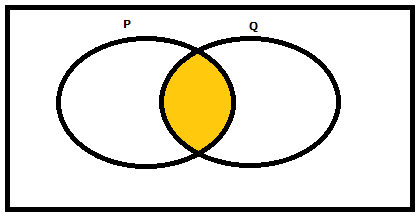

**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior los conjuntos P y Q, los cuales comparten una región. En el conjunto P dice Alumnos de 8 y en el conjunto Q dice Alumnos que miden más de 1,60. La región común está en blanco.

Ahora bien, si tenemos la conjunción:

p y q: x / x es alumno de 8º y mide más de 1,60, determinamos la intersección.

P  Q = {x / x es alumno de 8º y mide más de 1,60}, que en el dia­grama sería:

Imagen 2: Intersección.



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior con los conjuntos P y Q, los cuales comparten una región. La región común está rellena de color amarillo y corresponde a la intersección de los conjuntos.

Observa que a partir de la conjunción de dos proposiciones abier­tas, determinamos la intersección de los dos conjuntos generados por las proposiciones correspondientes. Recuerda que la definición de intersección es:

P  Q = {x / x  P y x  Q}

### Práctica lo aprendido

1. Si tenemos como Universo los países de la tabla:

Tabla 8: Producción de café

| PAÍS | CONTINENTE | TONELADAS |
| --- | --- | --- |
| Brasil | América | 600 |
| Colombia | América | 408 |
| Costa de Marfil | África | 204 |
| Uganda | África | 179 |
| Angola | África | 177 |
| México | América | 108 |
| Indonesia | Asia | 111 |
| Salvador | América | 104 |

Y las proposiciones abiertas

* m(x) = {x / "x es un país americano" }
* n(x) = {x / "x es un país africano" }
* p(x) = {x / "x produce más de 200 mu toneladas de café"}
* q(x) = {x / "x produce menos de 200 mil toneladas de café" }

1. Determina los conjuntos que se forman a partir de esas proposiciones abiertas.

* M = { }
* N = { }
* P = { }
* Q = { }

1. Forma las conjunciones siguientes y escríbelas en tu cuaderno :

* m (x)  p (x): x es un país americano y produce más de 200 toneladas de café
* m(x)  q(x):
* n(x)  q(x):
* n(x)  p (x):
* p(x)  q(x);

1. Forma las intersecciones:

* M  P = { }
* M  Q = { }
* N  P = { }
* N  Q = { }
* P  Q = { }

1. Representa gráficamente:

* M  N
* N  Q
* M  P
* M  Q

1. Califica las siguientes proposiciones escribiendo (0) a las falsas y (1) a las verda­deras de acuerdo con las condiciones expresadas en los cuadros.

* p : "Obtuve el primer lugar de mi grupo"
* q: "Fui comisionado como representante de aseo"
* p  q: "Obtuve el primer lugar de mi grupo y fui comisionado como representante de aseo".

Imagen 3: Niño 1.

1. 

* p: 1
* q:
* p  q:

Imagen 4: Niño 2

1. 

* p:
* q:
* p  q:

Imagen 5: Niño 3

1. 

* p:
* q:
* p  q:

Imagen 6: Niño 4.

1. 

* p: 1
* q:
* p  q:

1. Completa la tabla de verdad de la conjunción:

Tabla 9: Conjunción.

| p | q | p  q |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | ? |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | ? |
| 0 | 0 | ? |

1. Califica las siguientes proposiciones escribiendo (0) a las falsas y (1) a las verda­deras de acuerdo con los informes presentados en el cuadro.

Algo de historia

Tabla 10: Presidentes de Colombia desde 1934 a 1962

| Periodo | Presidente |
| --- | --- |
| 1934 – 38 | Alfonso López Pumarejo |
| 1938 – 42 | Eduardo Santos |
| 1942 - 45 | Alberto Lleras Camargo |
| 1945 – 46 | Mariano Ospina Pérez |
| 1946 – 50 | Laureano Gómez |
| 1950 – 53 | Gustavo Rojas Pinilla |
| 1953 – 57 | Junta Militar |
| 1957 – 58 | Alberto Lleras Camargo |
| 1958 - 62 | Guillermo León Valencia |

* p: "Alfonso López Pumarejo fue presidente de Colombia"
* q: "Alfonso López Pumarejo gobernó de 1945 al 50"
* r: "Laureano Gómez era presidente en 1938"
* s: "Guillermo León Valencia era presidente en 1960"
* t: "Alberto Lleras Camargo era presidente en 1954"
* u: "Eduardo Santos gobernó de 1934 al 38"
* p  q: "Alfonso López Pumarejo fue presidente de Colombia y gobernó de 1945 al 50"
* r  s: "Laureano Gómez era presidente en 1938 y Guillermo León Valencia en 1960"
* t  u: "Alberto Lleras Camargo presidente en 1954 y Eduardo Santos gobernó de 1934 al 38"
* t  r: "Alberto Lleras Camargo era presidente en 1938 y Laureano Gómez era presidente en 1938"

1. En un pizarrón colocado a la entrada de una escuela técnica se especifica:

REQUISITOS DE INGRESO:

* Certificado de básica secundaria
* Cuota de $850

Las siguientes personas estaban interesadas en ingresar, pero cada una estaba en las condiciones especificadas en el cuadro:

Tabla 11: Interesados en Ingresar

| Nombre | Certificado de básica secundaria | $850 |
| --- | --- | --- |
| Luis | Si tiene | No tiene |
| Miguel | No tiene | Si tiene |
| Ezequiel | No tiene | No tiene |
| Catalina | Si tiene | Si tiene |
| Aurora | Si tiene | No tiene |
| Flora | No tiene | Si tiene |
| Gabriela | Si tiene | Si tiene |

1. De acuerdo con la información escribe los conjuntos que se generan a partir de las proposiciones abiertas y completa:

* m (x): "x tiene certificado básica secundaria"

M = {x / x tiene certificado de básica secundaria}

M = {Luis, Gabriela, Catalina, Aurora}

* n (x): "x tiene para pagar la cuota de $850"

N = { }

* m (x)  n (x):
* n (x)  m (x):

1. ¿Qué personas se pudieron inscribir en la escuela?

## LA DISYUNCIÓN

El club coral de la escuela secundaria "Simón Bolívar" ha ganado un concurso entre todas las secundarias de la República; el premio consiste en un viaje a Centroamérica, para cantar en las escuelas de otros países.

Para gestionar el pasaporte respectivo, en el Ministerio de Relaciones Exteriores les pidieron acta de nacimiento o certificado de primaria: Al­fredo, Juan y Pedro, sólo tienen acta de nacimiento; Julio, Antonio, César y David, tienen sólo certificado de primaria; Emilio, Francisco y Javier tienen acta de nacimiento y certificado de primaria; Pablo y Raúl, no tienen ninguno de los dos documentos.

* ¿A quiénes les darán el pasaporte?

Si traducimos los requisitos a un lenguaje simbólico, tendríamos:

Una persona obtiene pasaporte si:

* "x tiene acta de nacimiento"
* "x tiene certificado de primaria"

"x tiene acta de nacimiento o tiene certificado de primaria" es una proposición abierta compuesta en la que se utiliza el conectivo "o", "".

p(x)  q (x) es una proposición abierta compuesta en la que se utili­za el conectivo "o", "".

A estas proposiciones las llamamos disyuncio­nes.

Formemos las siguientes proposiciones:

* Alfredo tiene acta de nacimiento o certificado de primaría.
* César tiene acta de nacimiento o certificado de primaria.
* Emilio tiene acta de nacimiento o certificado de primaria.

A estas proposiciones las llamamos disyunciones.

Completa, en tu cuaderno, la siguiente tabla de acuerdo con los datos que se dieron anteriormente, para saber si los siguientes alumnos obtendrán su pasaporte.

Tabla 12: Condiciones de alumnos.

| Nombre | P(x) | q(x) | p (x)  q (x) |
| --- | --- | --- | --- |
| Juan | si |  |  |
| Antonio |  |  |  |
| Javier |  |  |  |
| Raúl |  |  |  |

Observa en la tabla que completaste, cómo una disyunción es verda­dera, si al menos una de las proposiciones que la forman, lo es:

Si Juan = a

* p(a)  q(a): "Juan tiene acta de nacimiento o certificado de primaria"

p(a): 1

q(a): 0

p(a)  q(a): 1

Si Antonio = b

* p (b)  q (b): "Antonio tiene acta de nacimiento o certificado de pri­maria".

p (b): 0

q (b): 1

p (b)  q (b): 1

Si Javier = c

* p(c)  q(c): "Javier tiene acta de nacimiento o certificado de prima­ria".

P(c): 1

q(c): 1

p(c)  q(c): 1

Para Raúl = d

* p (d)  q (d): "Raúl tiene acta de nacimiento o certificado de prima­ria".

p (d): 0

q (d): 0

p (d)  q (d): 0

En los ejemplos anteriores se observa que:

Una disyunción es falsa sólo si las dos proposiciones que la forman, lo son.

La tabla de verdad de la disyunción sería:

Tabla 13: Disyunción

| p | q | p  q |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Compara la tabla de la conjunción y de la disyunción.

* ¿Son iguales?
* ¿Cuáles son sus diferencias?

Si quieres entrar a un club de fútbol, ¿es igual que te exijan: Ser mayor de 12 años o tener el uniforme o Ser mayor de 12 años y tener el uniforme?

Explica por qué no son iguales las situaciones:

* ¿Cuál es la más ventajosa para ti?

La tabla de verdad anterior nos sirve para determinar el valor de ver­dad de cualquier disyunción que tengamos, por ejemplo:

Si tenemos las proposiciones:

s  t: "Julia vende arepas o tortas" y analizamos los valores de ver­dad de 5 y de t, tenemos:

* s: 0
* t: 1
* s  t: 1

De acuerdo con el tercer renglón de la tabla de verdad anterior:

Tabla 14: Disyunción de s y t

| s | t | s  t |
| --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 1 |

### Práctica lo aprendido

1. Califica las proposiciones siguientes, de acuerdo con los datos que se te proporcionan y con la tabla de verdad correspondiente, escribiendo V o F según corresponda.

* P = { x / x es primo }

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...}

* C= { x / x es compuesto}

C= {4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15...}

1. m: "7 es número compuesto"
2. n: "9 es número compuesto"
3. r: "2 es número primo"
4. s: "2 es número par"
5. t: "39 es número primo"
6. u: "39 es número compuesto"
7. Determina el valor de verdad de:
8. m  n
9. n  r
10. s  r
11. n  u
12. n  r
13. m  n
14. n  r
15. s  t
16. n  u
17. n  r
18. m  r
19. n  m
20. m  n
21. n  m
22. m  m
23. ¿Cómo son los valores de m  n y de n  m?
24. ¿Cómo llamarías a esta propiedad de la disyunción?
25. Para entrar a bailar en una mini teca en un determinado colegio se imponen una de las siguientes condiciones:

* p: "El alumno debe ser de un curso de grado mayor o igual a 6º."
* q: "El alumno debe tener más de 11 años"
* p  q: "El alumno debe ser de grado mayor o igual a 6º o tener más de 11 años de edad"

Completar la tabla de acuerdo a las condiciones citadas para los alumnos dados:

Tabla 15: Preinscritos a basquetbol

| Alumno | Curso | Edad | Si puede entrar |
| --- | --- | --- | --- |
| Alma | 7 | 13 | Sí |
| Bertha | 6 | 10 |  |
| Juan | 5 | 11 |  |
| Carlos | 5 | 9 |  |

Tabla 16: Disyunción según datos.

| p | q | p  q |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 |  |
|  | 1 |  |
| 0 | 0 |  |

## LA DISYUNCIÓN LÓGICA Y LA UNIÓN DE CONJUNTOS

Hemos estudiado en Ciencias Naturales que los cuerpos se electrizan por frotamiento y que la carga eléctrica adquirida puede ser positiva o nega­tiva.

Que los objetos de vidrio adquieren carga positiva y que los de plás­tico adquieren negativa.

Ahora bien, si nuestro universo son los objetos siguientes:

1. Peine
2. Esfero
3. Regla
4. Vaso de vidrio
5. Mesa de pin pon
6. Pelota de tenis
7. Copa de vidrio
8. Lápiz
9. Pipeta
10. Balón aforado

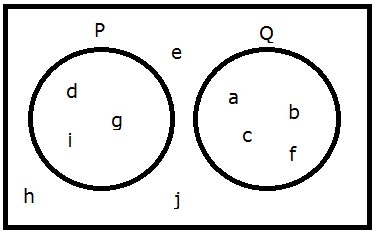
y tenemos las proposiciones abiertas:

* p(x): "x adquiere carga positiva al ser frotado"
* q(x): "x adquiere carga negativa al ser frotado"

Podemos determi­nar los conjuntos:

* P = {d, g, i}
* Q = {a, b, c, f}

Imagen 7: Diagrama de Conjuntos P y Q



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior con los conjuntos P y Q, los cuales no comparten una región. En el conjunto P están las letras d, g, i y en el conjunto Q las letras a, b, c, f. Externo a los conjuntos P y Q pero al interior del diagrama se encuentran las letras e, h, j.

Ahora bien, si tenemos la disyunción: p(x)  q(x): "x adquiere car­ga negativa o positiva al ser frotado" tendríamos el conjunto:

P  Q = {a, b, c, d, f, g, i}

Puesto que la unión de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al primer conjunto o al segundo conjunto:

A  B = {x / x  A  x  5}

El conjunto A  B es el conjunto de los elementos x tales que x per­tenece al conjunto A, o x pertenece al conjunto B.

Observa en el diagrama, que los elementos que hacen verdadera la disyunción p(x)  q(x) pertenecen al conjunto P  Q, por ejemplo:

* p(a)  q(a): "El peine adquiere carga positiva o negativa al ser fro­tado"

p: 0

q: 1

p  q: 1

Así que: a pertenece a P  Q

* p(h)  q(h): "La silla adquiere carga positiva o negativa al ser frota­da"

p: 0

q: 0

p  q: 0

Así que:

* h no pertenece a P  Q

Así, podemos afirmar que:

Una proposición abierta disyuntiva de la forma p(x)  q(x) genera la unión de los conjuntos correspondientes.

### Práctica lo aprendido

De acuerdo con los datos siguientes, resuelve los ejercicios (1 al 4) propuestos:

Tabla 17: Represas más grandes del mundo.

| NOMBRE | PAÍS | VOLUMEN EN Hm3 |
| --- | --- | --- |
| Tarbella | Pakistán | 149961 |
| Hort. Peck | E. U. | 91000 |
| M angla | Pakistán | 82800 |
| Oahe | E. U. | 70300 |
| Gardiner | Canadá | 65600 |
| Oraville | E. U. | 61397 |
| San Luis | E. U. | 59639 |
| Nurek | U.R.S.S. | 58800 |
| Naga Junosagar | India | 53300 |
| Garrison | E. U. | 50845 |
| Kiev | U.R.S.S. | 44400 |

Si tenemos la proposición abierta: m(x): "x es represa de Pakistán"

1. Forma dos proposiciones lógicas falsas y dos verdaderas, y escríbelas en tu cuaderno.

Garrison es presa de Pakistán: Falsa

1. Forma los conjuntos:

* M = { x / x es represa de Pakistán}
* N = {x / x es represa de E.U.}
* O = {x / x es represa de la U.R.S.S.}
* P = {x / x es represa con un volumen mayor de 50000 Hm3 de agua}

1. Encuentra los elementos de:

* M  N = { }
* M  P = { }
* M  N = { }
* M  P = { }
* (M  P)  P = { }
* N  P = { }
* (M  P)  N = { }

1. Representa gráficamente:

* M  N
* N  P

1. Determina las disyunciones y los conjuntos que se te piden, de acuerdo datos del cuadro siguiente:

Tabla 18: Vitaminas Solubles en Agua

| Designación | Alimentos en que se encuentra | Requerimiento diario |
| --- | --- | --- |
| Vitamina C | Cítricos: limón, naranja, toronja, fre.sa, melón . . . | 75 mg. |
| Vitamina B1 | Cereales, huevo, plátano, manzana, berros, papas . . . | 2mg. |
| Vitamina B2 | Leche, hígado.-huevo, levadura de cerveza . . . | 2mg. |

1. m(x): "x es vitamina que se encuentra en el huevo"
2. n(x): "x es vitamina que se encuentra en la leche"
3. a(x): "x es vitamina que se encuentra en el hígado"
4. b(x): "x es vitamina de la que requerimos 2 mg diariamente"
5. a(x)  b(x):
6. m(x)  b(x):

## NEGACIÓN

Hace algunos años se suscitó una polémica acerca del descubrimiento de los restos de Cuauhtémoc al pie del altar de una pequeña iglesia en Ixcateopan. La doctora Eulalia Guzmán afirmaba que los restos encontrados habían pertenecido a Cuauhtémoc, mientras que don Alfonso Caso no estaba de acuerdo y decía que los restos encontrados no habían perte­necido a Cuauhtémoc.

Uno de los dos científicos tenía la razón, no es posible que los dos estuvieran en lo cierto, o los dos estuvieran equivocados, es decir, cuan­do tenemos una proposición:

* "Los restos encontrados en Ixcateopan pertenecieron a Cuauhtémoc" y a partir de ella, se niega:

"Los restos encontrados en Ixcateopan no pertenecieron a Cuauhtémoc".

Una de las proposiciones es verdadera, y necesariamente la otra es falsa, en el tipo de lógica que estamos estudiando aquí.

Luego, podemos decir que:

Una proposición es la negación de otra, cuando el valor de verdad de una de ellas es contrario al valor de verdad de la otra, esto es: Si la una es verdadera la otra es falsa o viceversa, y al negar una de ellas, se obtiene la otra.

Así, por ejemplo:

Si p: " es un número entero"

No p, sería: " no es un número entero"

* p: 0
* No p: 1

No p, lo simbolizamos: p

Lee con cuidado el siguiente ejemplo:

Si digo: "Mi vestido es blan­co'" y negara la proposición diciendo: "Mi vestido es negro".

Imagen 8: Vestido

Vestido de color rosa.


**Descripción Imagen:** Dibujo de un vestido en un gancho, el vestido es de color rosado.

Observa que "mi vestido es blanco" y "mi vestido es negro", son falsas, y sabemos que si se tiene una proposición y su negación, una se­rá falsa y la otra verdadera, así que no podemos negar ". . . es blanco" con ". . . es negro". La negación de q: "Mi vestido es blanco", debe ser q: "Mi vestido no es blanco".

Como notas, para negar una proposición, se necesita usar la palabra "NO", lo que se puede hacer en diferentes formas:

* "Mi vestido no es blanco"
* "No es cierto que mi vestido sea blanco".

### Práctica lo aprendido

1. ¿Puedo negar "yo siempre voy a la escuela" con la proposición "yo nunca voy a la escuela?"

* ¿Por qué?

1. ¿Puedes negar "yo subo" con "yo bajo"?

* ¿Por qué?

1. Niega las proposiciones; escribe las negaciones:
2. m: "Pedro entra"
3. n: "Juan llora"
4. ñ: "Hoy es lunes"
5. Evaluar las siguientes proposiciones de acuerdo con los datos proporcionados.

Tabla 19: Producción de Egipto

| Producto | Toneladas |
| --- | --- |
| Trigo | 1500000 |
| maíz | 1900000 |
| arroz | 2000000 |
| caña de azúcar | 4349000 |
| algodón | 504000 |

* p: "La caña de azúcar es el principal producto agrícola de Egipto"
* q: "En Egipto se producen más de 2 millones de toneladas de arroz”
* r: "El algodón es la producción agrícola más alta en Egipto".

¿Observaste en el ejercicio anterior que el valor de no p, depende del valor de p?

Por ejemplo, si r: 0, no r: 1

* 1. Completa ahora la tabla de negación

1. Si sabes que las proposiciones a y b son verdaderas y m y n son falsas, califica las negaciones:
2. No a
3. No m
4. No b
5. No n

1. En Matemáticas, para simbolizar la negación de algunas relaciones, se acostumbra tachar el símbolo de la relación, por ejemplo:

* 3 = 3, tres igual 3
* 35, 3 no es igual a 5

1. Escribe debajo de cada relación el significado y su contrario, como en el ejemplo anterior:

* 2+3 =8
* 5 > 2
* a pertenece a M
* 8 divide a 24

1. Califica las siguientes proposiciones de acuerdo con las condiciones que se indican:

* p: "En mi pueblo hay agua potable" :
* no p: "En mi pueblo no hay agua potable"

1. Ciudad con agua potable

P:

No p:

1. Ciudad sin agua potable

P:

No p:

1. Completa la tabla de verdad de la negación.

Tabla 20: Negación.

| p | No p |
| --- | --- |
| 1 |  |
| 0 |  |

1. Escriba las negaciones de las siguientes proposiciones:
2. p: "Cinco más tres es igual a siete"
3. q : "Tres por ocho es igual a veinticuatro"
4. r: "Seis divide a quince"
5. s: "Ocho es diferente a cuatro por dos"

## COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Si consideramos como universo a los equipos de fútbol profesionales del país; es decir:

1. América
2. Cali
3. Millonarios
4. Santa Fe
5. Nacional
6. Medellín
7. Quindío
8. Tolima
9. Cúcuta
10. Junior
11. Magdalena
12. Bucaramanga
13. Sporting
14. Caldas
15. Pereira

Y tenemos la proposición abierta: "x es equipo del Valle del Cauca".

A partir de esa proposición determinamos un conjunto:

Imagen 9: Conjunto J

Diagrama que contiene al conjunto J y sus elementos


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior con el conjunto J. Al interior del conjunto J, se encuentran las letras a, b. Al interior del diagrama de Venn pero de manera externa al conjunto J se encuentran los elementos c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o.

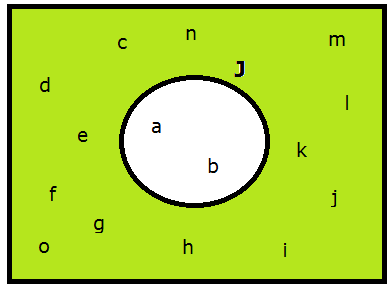
J = {x / x es equipo del Valle del Cauca}

J = {a, b}

Ahora bien, si aplicamos la negación de J(x):

"x no es un equipo del Valle del Cauca" podemos determinar un conjunto:

Imagen 10: Complemento de J



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn, al interior el conjunto J. Dentro del conjunto J, se encuentran las letras a, b. Al interior del diagrama pero de manera externa al conjunto J se encuentran los elementos c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o. Los elementos interiores al diagrama pero exteriores al conjunto J son el complemento de J.

J’ = {x / x no es equipo del Valle del Cauca} el que se formará con los equipos que lo complementan en relación al universo:

J’ = {c, d, e, f, g, h, i, j, k, I, m, n, o}

Así, el conjunto de equipos que no pertenecen a J porque no son del Valle del Cauca, forman el COMPLEMENTO del conjunto en el universo que consideramos (Equipos de primera división o profesional).

El conjunto complemento se simboliza J’

El complemento de un conjunto A, con respecto a un universo, es el conjunto de elementos del universo que no pertenecen a A.

A' = {x tales que x pertenece a U y x no pertenece a A}

Por ejemplo:

Si U = {x / x es alumno de nuestro grupo}

A = {x / x es mujer}

A'= {x /x no es mujer}

Imagen 11: Conjunto por género.

Complemento del conjunto de mujeres.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior el conjunto A. En el conjunto A, se encuentra la palabra mujeres. Al interior del diagrama pero de manera externa al conjunto A se encuentran la letra A’ y la palabra varones, lo externo al conjunto A, es el complemento del conjunto A.

### Práctica lo aprendido

1. Determina el complemento de cada conjunto y represéntalo con un diagrama.
2. U = {x / x es dígito}

P = {x / x es primo}

1. U = {x / x es miembro de mi familia}

M = {x / x es mayor de 15 años}

1. Selecciona 5 compañeros de tu grupo y pregúntales quiénes vieron ayer algún programa de televisión, o quiénes estudiaron. Completa el cuadro anotando el nombre y la palabra Si o No según te hayan contestado.

Tabla 21: Encuesta a compañeros

| Nombre | Vio programa de TV | Estudió |
| --- | --- | --- |
| ? |  |  |
| ? |  |  |
| ? |  |  |
| ? |  |  |
| ? |  |  |

Toma como universo al conjunto formado por los compañeros que seleccio­naste y determina los conjuntos que se generan a partir de las proposiciones abiertas siguientes:

* 1. a(x) : "x vio algún programa de TV"

A = {x / x vio algún programa de TV}

* 1. No a (x): "x no vio algún programa de TV"

A'= {x / x

* 1. b (x): "x estudió"

B= {x / x estudió}

* 1. No b (x): "x no estudió"

B' = {x / x…}

* 1. No a (x)  b(x): "x no vio algún programa de TV y estudió"

A'  B = { }

* 1. a(x)  no b(x): "x vio algún programa de TV y no estudió"

## LA IMPLICACIÓN

Raúl y Francisco, que son muy amigos, asistieron en las olimpiadas al partido de volibol entre U.R.S.S. y Japón. Al iniciarse el partido, Raúl dice:

"Si gana Japón, yo pago el taxi".

La situación de los dos amigos con el juego y el taxi, puede tener los siguientes resultados.

¿En cuál de todos, Raúl habría dicho una mentira? Escríbelo.

Tabla 22: Conclusión de los comportamientos.

| P | Valor de verdad | q | Valor de verdad | Conclusión |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| gana Japón (si ganó) | V | pago el taxi (Raúl pagó) | V | Raúl dijo la verdad |
| gana Japón (si ganó) | V | pago el taxi (Raúl no pagó) | F |  |
| gana Japón (no ganó) | F | pago el taxi (Raúl pagó) | V |  |
| gana Japón (no ganó) | F | pago el taxi (Raúl no pagó) | F |  |

La expresión anterior: "Si gana Japón yo pago el taxi", es una pro­posición compuesta, formada por las proposiciones:

* p: "Gana Japón"
* q: "Yo pago el taxi"

Unidos por el conectivo si... entonces, y que se puede interpretar:

1. "Si gana Japón, entonces yo pago el taxi"
2. Que gane Japón es condición suficiente para que yo pague el taxi"; o más corto:
3. "Si gana Japón, pago el taxi".

Este tipo de proposiciones son llamadas implicaciones o condiciona­les: por ejemplo:

* Si llueve, hay mucho tráfico lo que se simboliza:

p: llueve

q: Hay mucho tráfico

p  q: Si llueve, hay mucho tráfico

En las implicaciones llamamos antecedente a la primera proposición y consecuente a la segunda.

Analiza en las situaciones del ejemplo anterior, cuando es verdadera una implicación:

p  q: Si gana Japón, pago el taxi.

* Ganó Japón y Raúl pagó el taxi: Raúl ha dicho la verdad.
* Ganó Japón y Raúl no pagó el taxi: Raúl ha dicho una mentira.
* No ganó Japón y Raúl pagó el taxi: En este caso, Raúl es esplén­dido, pero no mentiroso, porque él no había advertido qué haría si Japón perdía.
* No ganó Japón y Raúl no pagó el taxi; Raúl ha dicho la verdad.

Observa que:

Una implicación o proposición condicional, es falsa, sólo cuando el an­tecedente es verdadero y el consecuente falso, en los otros casos es verdadera.

De acuerdo con lo anterior, llena la tabla de verdad de la implica­ción:

p  q: Si llueve, hay mucho tráfico.

Tabla 23: Implicación

| P |  | q |  | p  q | p | q | p  q |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Llueve | V | hay mucho tráfico | V | V | 1 | 1 | 1 |
| Llueve | V | hay mucho tráfico | F |  | 1 | 0 |  |
| Llueve | F | hay mucho tráfico | V |  | 0 | 1 |  |
| Llueve | F | hay mucho tráfico | F |  | 0 | 0 |  |

Si tenemos una proposición condicional, podemos saber su valor de verdad, aplicando la tabla de verdad, por ejemplo:

* a  b: "Si 8 es par, su cuadrado es par"

a: Verdadera

b: Verdadera

a  b: Verdadera

* m  n: "Si 2 es un número primo, entonces es impar."

m: Verdadera

n: Falsa

m  n: Falsa

* r  s: "Si México es país europeo, entonces pertenece al continente americano".

r: falso

s: Verdadera

r  s: Verdadera

* t  u: "Si Santiago es capital de Argentina, Domingo Perón fue chileno".

t: falso

u: Falso

t  u: Verdadera

Lee cuidadosamente las siguientes implicaciones y piensa cuándo son verdaderas en todos los casos en que se apliquen:

* Si x es antioqueño, entonces es colombiano.
* Si x es colombiano, entonces es antioqueño.
* Si x es alumno de 6o. A, es alumno de la secundaria.
* Si x es alumno de la Secundaria, es alumno de 6o. A.
* Si x es jugador del América, es futbolista.
* Si x es futbolista, es jugador del América.

Analicemos el primer ejemplo:

"x es antioqueño" "x es colombiano"

Veamos cuál de las implicaciones anteriores: p  q o q  p, es ver­dadera en cualquier caso en que se aplique:

Si tenemos la proposición abierta dentro del universo de todos los habitantes del mundo.

"x es colombiano" determinamos un conjunto:

Q = {x/x es colombiano} y lo representamos en un diagrama:

Imagen 12: Subconjunto

Representación gráfica de un conjunto con un subconjunto al interior de este.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior con el conjunto Q. El conjunto Q. El conjunto Q es un subconjunto.

Ahora veamos la otra proposición: "x es antioqueño" determinamos el conjunto:

P = {x/x es antioqueño}

¿Cómo lo representaríamos?

Imagen 13: Subconjunto de un subconjunto

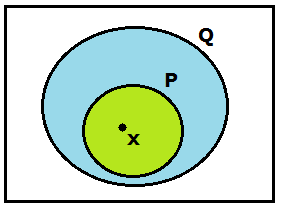
Representación gráfica del subconjunto de un subconjuntode un conjunto.
 

**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior el conjunto Q. En el conjunto Q, se encuentra el conjunto P, el conjunto P es subconjunto del conjunto Q, y el conjunto Q es un subconjunto.

Puesto que los antioquenos son parte de los colombianos.

Así que si tenemos un elemento x que esté situado dentro de P:

Imagen 14: Elemento de un subconjunto de un subconjunto de un conjunto.



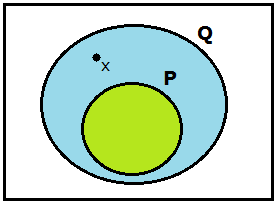
**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior el conjunto Q. En el conjunto Q, se encuentra el conjunto P, al interior de P está la letra x. x es un elemento del conjunto P, que es subconjunto del conjunto Q, y el conjunto Q es un subconjunto.

Podemos decir que: x pertenece a P entonces x pertenece a Q.

Es decir que la implicación p  q será siempre cierta, siempre que x no pertenece a P implique que x pertenece a Q.

Pero si x no pertenece a P ¿será cierto que siempre x pertenece a Q? Observa este diagrama:

Imagen 15: Elemento del subconjunto P.



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior el conjunto Q. En el conjunto Q, se encuentra el conjunto P, al interior de Q, pero exterior a P está la letra x. x es un elemento del conjunto Q, pero no es elemento del subconjunto P del conjunto Q, y el conjunto Q es un subconjunto.

Aquí x pertenece a Q, pero x no pertenece a P. Es decir que alguna persona puede ser colombiana pero no es necesario que sea antioqueña, pues puede ser tolimense, costeña, cundinamarqués, etc.

Así que observa que una implicación, si p  q es verdadera, puede suceder que haya casos en los que q  p no lo sea:

Por ejemplo:

* Si Belisario Betancourt es antioqueño, entonces es colombiano
* Si López es colombiano, entonces es antioqueño

### Práctica lo aprendido

1. Si tenemos las proposiciones:

* a:"8>3"
* d:"6 divide a 12"
* g: "5x8 =40"
* e: "6 divide a 9"
* h: "3+2=3"
* c: "3>8"
* .f: '"6 divide a 6"
* i: "3-5= -2"
* b: “8>6”

1. Califica las proposiciones anteriores
2. Califica las proposiciones condicionales escribiendo (0) o (1)

* ab
* gh
* ac
* de
* ae
* di

1. Lee cada par de implicaciones, anota cuál de las dos es verdadera en todos los casos y explica por qué.
2. m  n: "Si es pato, entonces sabe nadar"

m  n, Es verdadera en todos los casos porque todo pato sabe nadar.

1. n  m: "Si sabe nadar, entonces es pato”

n  m, No es verdadera, ya no todos los que saben nadar son patos. Ejemplo: personas.

1. f  v: "Si tiene flores, entonces es vegetal"
2. v  f: "Si es vegetal, entonces tiene flores"
3. a  v: "Si es ave, vuela"
4. v  a: "Si vuela, es ave"
5. p  f: "Si tiene muchos pétalos, es flor"
6. f  p: "Si es flor, tiene muchos pétalos"
7. b  a: "Si nació en Buenos Aires, es argentino"
8. a  b: "Si es argentino, nació en Buenos Aires"
9. Complementa la tabla de verdad de la implicación:

Tabla 24: Valor de verdad de la implicación

| p | q | p  q |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |
| 0 | 1 |  |
| 0 | 0 |  |

1. Analiza el siguiente cuadro:

Tabla 25: Porcentaje de analfabetismo 1980

| País | Número de habitantes | Porcentaje |
| --- | --- | --- |
| Bolivia | 5613486 | 27% |
| Brasil | 121148582 | 22% |
| Colombia | 25867326 | 17% |
| Cuba | 9723605 | 8% |
| México | 66846833 | 17% |
| Unión Soviética | 262436227 | 0% |

1. Forma las proposiciones compuestas que se indican, a partir de las siguien­tes proposiciones simples y califícalas:

* p: "Bolivia tiene el menor número de habitantes"
* q: "Colombia tiene el menor índice de analfabetismo"
* r: "La Unión Soviética tiene el mayor número de habitantes"
* s: "La Unión Soviética tiene el menor índice de analfabetismo".

1. p  q: Si Bolivia tiene el menor número de habitantes, entonces tiene el menor índice de analfabetismo. ( Falso)
2. r  s:
3. p  r:
4. q  s:
5. q  s:

## INCLUSIÓN DE CONJUNTOS

Veamos otro de los ejemplos anteriores:

H = Habitantes de la República de Colombia.

H = {x / x es habitante de Colombia}

* Si x es jugador del América es futbolista.
* Si x es futbolista, es jugador del América.

Si dentro de los habitantes de la República de Colombia aplicamos la proposición abierta: x es futbolista.

Determinamos el conjunto de futbolistas:

Imagen 16: Subconjunto de futbolistas.

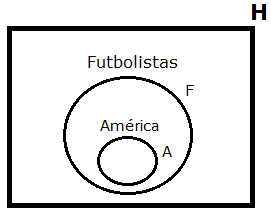
Representación gráfica de un subconjunto de futbolistas.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn etiquetado con la letra H, al interior el conjunto Futbolistas.

F = {x / x es futbolista}

Y si ahora tenemos la proposición, "x es jugador del América", tendre­mos un conjunto dentro del conjunto anterior:

Imagen 17: Subconjunto América en el de Futbolistas.



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn etiquetado con la letra H, al interior el conjunto F Futbolistas, al interior de este el conjunto A América.

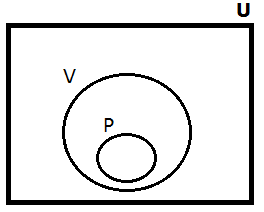
A = {x / x es jugador del América)

Observa que en ocasiones, se da el caso de que dado un conjunto, hay necesidad de seleccionar algunos elementos de él, bajo ciertas con­diciones para formar un nuevo conjunto.

En este caso se dice que el nuevo conjunto está incluido en el pri­mero, por ejemplo: A está incluido en F. También se dice que A es subconjunto de F; esto se simboliza: A  F y se lee: A está incluido en F, o A es subconjunto de F.

Por ejemplo, si de todos los seres vivos, tomamos el conjunto de vegetales, y dentro de él, a los que tienen flores tendríamos:

Imagen 18: Subconjunto P del subconjunto V en U



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn etiquetado con la letra U, al interior con el conjunto V, al interior de este el conjunto P.

* U = {x / x es ser vivo}
* V = {x / x es vegetal}
* P = {x / x tiene flores}

El diagrama ilustra la relación que existe entre P y F, se observa que P  V, es decir P está incluido en V, o P es subconjunto de V.

Por supuesto que cuando tomamos del universo algunos elementos para formar un conjunto, ya tenemos la primera relación de inclusión, por ejemplo: F  U.

Observa este otro ejemplo:

Dentro de los países del mundo tenemos:

* M ={ x / x es un país americano}
* N = { x / x participó en las olimpiadas de 1972}

Imagen 19: Elementos en conjuntos Intersecantes.

Representación gráfica de conjuntos con región en común y los elmentos en cada una de las regiones.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn etiquetado con la letra U, al interior los conjuntos M y N con una región en común, al interior del conjunto M (sin la intersección) se encuentra las letras P y G, en la intersección los conjuntos M y N, se encuentran las letras M, E, A, B. Al interior del conjunto N (sin la intersección) se encuentran las letras F, S, U. Externos a los conjuntos M y N se encuentras las letras Ch y D.

Dónde:

* P = Panamá
* G = Paraguay
* Ch= China Popular
* F = Francia
* M = México
* E = Estados Unidos
* A = Argentina
* S = Suecia
* B = Cuba
* U = URSS
* D = Bangladesh

Como adviertes en el diagrama, M  N, M no está incluido en N, o M no es subconjunto de N.

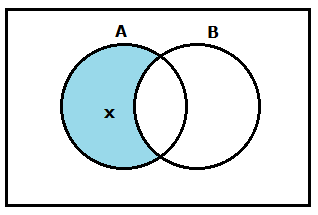
Así que, en conclusión, podemos decir que:

Para que un conjunto A, sea subconjunto de un conjunto B, es necesario que todos los elementos de A, pertenezcan a B.

A  B, si y sólo si, para todo x en A entonces x está en B.

En cambio, no podemos decir que A es subconjunto de B, si existe un elemento x que pertenezca a A y x no pertenezca a B.

Imagen 20: Conjuntos Intersecantes.



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn, al interior los conjuntos A y B con una región en común, al interior del conjunto A (sin la intersección) se encuentra la letra x. Dado que los conjuntos A y B comparten un región, estos se denominan Intersecantes.

O si todo elemento x que pertenece a A entonces x no pertenece a B.

Imagen 21: Conjuntos Disyuntos.

Representación gráfica de los conjuntos disyuntos A y B.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn, al interior los conjuntos A y B sin región en común, al interior del conjunto A se encuentra la letra x.

Para mostrar que un conjunto P, no es subconjunto de otro Q, basta con encontrar un elemento de P, que no pertenezca a Q, por ejem­plo:

* {Cordobeses} no contenido en { brasileños}
* {Happy Lora} pertenece a { cordobeses}
* {Happy Lora} no pertenece { brasileños}

Cuando hablamos de que un conjunto A, es subconjunto de otro B, por lo regular, pensamos que el subconjunto A tiene menos elementos que B.

Sean:

* A = {x / x es animal }
* B ={x / x es mamífero}

Por tanto, A está contenido en B

Sin embargo, si analizamos la definición de inclusión: A contenido en B si y sólo si para toda x que perteneces a A, x pertenece a B, veremos que A está contenido en A, porque sabemos, que todo x en A entonces x pertenece a A.

También podemos afirmar que el conjunto que no tiene ningún elemento denominado conjunto vacío, que se simboliza con: , se encuentre contenido en A, lo que se escribe:



Puesto que en el conjunto vacío, no encontramos elementos (porque no los tiene) que no pertenezcan a A.

Así que decimos, que en cualquier conjunto A

* A está contenido en A
* Vacío contenido en A

A y  se llaman subconjuntos impropios de A. Así que puedes ver, que no siempre un subconjunto A de otro conjunto P, tiene menos elementos que P.

¿Cuántos subconjuntos podemos formar dentro de un conjunto?

Si tenemos los siguientes alimentos para desayunar:

* Fríjoles
* Longaniza
* Huevos

D = {f, l, h}

¿De qué alimentos puede estar compuesto nuestro desayuno?

1. En primer lugar, podemos no desayunar

O sea vacío.

1. Desayunar huevos, longaniza y fríjoles:

{h, l, f}

1. O solamente desayunar:

* huevos:

{h}

* Longaniza:

{l}

* Fríjoles:

{f}

1. O huevos con longaniza:

{h, l}

1. Huevos con fríjoles:

{h, f}

1. Longaniza con fríjoles:

{l, f}

Observa que de un conjunto de 3 elementos podemos tener 8 subconjuntos:

Subconjuntos de A = {a, b, c}:

1. Vacío
2. A
3. {a}
4. {b}
5. {c}
6. {a, b}
7. {a, c}
8. {b, c}

En general, con 3 elementos se pueden formar: 2 a la 3 subconjuntos.



¿Cuántos subconjuntos formarás con un conjunto de 4 elementos? Por ejemplo, si ahora para el desayuno puedes tener: huevos, longa­niza, fríjoles, tortillas.

Tendríamos los 8 subconjuntos como antes:

1. Vacío
2. {h, l, f}
3. {h}
4. {l}
5. {f}
6. {h, l}
7. {h, f}
8. {l, f}

y además otros ocho subconjuntos más, al agregar t, a cada uno de los anteriores:

1. {t}
2. {h, l, f, t}
3. {h, t}
4. {l, t}
5. {f, t}
6. {h. l. t}
7. {f, h, t}
8. {l, f, t}

En total, tenemos 16 subconjuntos con un conjunto de 4 elementos.



¿Cuántos subconjuntos formaremos con un conjunto de 5 elementos?



¿Y con un conjunto de 6 elementos?

Así que podemos decir que el número de subconjuntos de un conjunto, será 2 a la n en donde n representa el número de elementos del conjunto.

### Práctica lo aprendido

Lee detenidamente las tablas y después resuelve del 1 al 3:

Tabla 26: Clasificación de los vegetales.

| Criptógamas | Fanerógamas |
| --- | --- |
| * Algas * Hongos * Líquenes * Hepáticos * musgos | * angiospermas * gimnospermas  1. monocotiledóneas 2. dicotiledóneas |

Tabla 27: Clasificación de los animales.

| Invertebrados | Vertebrados |
| --- | --- |
| * espongiarios * celenterados * platelmintos * nematelmintos * anélidos * artrópodos * moluscos * equinodermos | * peces * anfibios * reptiles * aves * mamíferos |

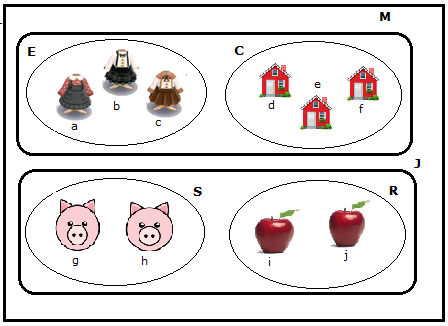
1. Escribe los conjuntos por extensión:

U = {x / x es un ser vivo}

* A = { x / x es fanerógama}
* H = { x / x es molusco}
* I = { x / x es ave}
* J = { x / x es reptil}
* K = { x / x es vertebrado}
* L = { x / x es invertebrado}
* M = { x / x es animal}
* B = {x / x es criptógama}
* C = { x / x es angiosperma }
* D = { x / x es dicotiledónea}
* E = {x /x es hongo}
* F= { x / x es vegetal}
* G = { x / x es artrópodo}

1. Representa con un diagrama los conjuntos:
2. A, F
3. A, B
4. B, F
5. B, E
6. G, L
7. I, J
8. Establece la relación de inclusión entre los conjuntos siguientes, escribien­do los símbolos de contenencia o no contenencia, según corresponda:
9. A y B
10. D y C
11. E y B
12. A y D
13. A y F
14. B y F
15. C y D
16. C y F
17. C y L
18. J y M
19. K y J
20. L y K
21. M y L
22. Si tenemos que Julio, Pedro, Manuel y Octavio, tienen la opción de asistir a un concurso de oratoria. ¿Cómo crees que se puedan reunir para ir?
23. No van al concurso:
24. Van los cuatro:
25. Van tres de ellos:
26. Van dos de ellos:
27. Va una de ellos:
28. Encuentra todos los subconjuntos de A = {1, 2, 3}
29. Escribe contenido o no contenido dentro del paréntesis, según corresponda, de acuerdo con las figuras

Imagen 22: Subconjuntos de subconjuntos



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn, al interior con los conjuntos M y J. Al interior del conjunto M se encuentran los conjuntos disyuntos E y C, al interior de E hay 3 imágenes de vestidos etiquetados con las letras a, b, c. Al interior de C hay 3 dibujos de casas etiquetados con las letras d, e, f. Al interior del conjunto J están los conjuntos disyuntos S y R, al interior de S hay dos dibujos de cerdos etiquetados con las letras g, h. Al interior de R hay dos imágenes de manzanas etiquetadas con las letras i, j.

* 1. E y M
  2. M y C
  3. S y J
  4. S y R
  5. E y C
  6. C y M
  7. R y J
  8. J y R

1. Indica las posibles combinaciones que puede hacer una persona que siga la rece­ta que indica que se puede agregar al gusto, pimienta, orégano o clavo.

A = {p, o, c}

1. No agregar ingrediente
2. Agregar todos los ingredientes

¿Cuántas combinaciones fueron posibles en total?

## PROPOSICIONES EQUIVALENTES Y CONJUNTOS IGUALES

En la lección anterior, vimos que en una implicación no siempre se pue­de permutar el lugar del antecedente y el consecuente. Por ejemplo:

* p(x): "x es tolimense"
* q(x): "x es colombiano”

La proposición p(x) entonces q(x) es verdadera para cualquier x:

x: Murillo Toro

p q: "Si Murillo Toro es tolimense, entonces es colombiano" es verdadero. Pero la proposición q(x) entonces p(x) no es verdadera para cualquier x:

x: Gabriel García Márquez

q  p: "Si García Márquez es colombiano, entonces es tolimense", es una proposición falsa ya que García Márquez si es colombiano pero es falso que sea tolimense.

Sin embargo, hay casos en los que sí ocurre que: p(x)  q(x) y q(x) p(x) son verdaderas para todos los casos:

Por ejemplo:

* p(x)  q(x): "Si un número natural es par, entonces su cuadrado es par."
* q(x)  p(x): "Si el cuadrado de un número natural es par, el número es par."
* p(x) = x es número par
* q(x) = x al cuadrado es número par

Si x = 4

* p(x) q(x): "Si x es par, x al cuadrado es par."

p  q: “Si 4 es par, 4 a la 2 es par"

* q(x)  p(x): "Si x al cuadrado es par, x es par."

q  p: "Si 4 a la 2 es par, 4 es par"

Cuando tenemos estos casos: p  q y q  p, en que las dos implicaciones son verdaderas en todos los casos decimos que las proposiciones son equivalentes, o que están relacionadas por una doble implicación y las representamos:

p  q

Lo que se traduce:

* p  q: "p es equivalente a q"
* p  q: "p si y sólo si q".

Por ejemplo:

"x es par si y sólo si x al cuadrado es par."

* A está contenido en B si y sólo si para todo x en A entonces x pertenece a B.

Se dice que dos proposiciones son equivalentes, si tienen el mismo valor de verdad.

Por ejemplo:

Si tenemos: m  n

m: “”

n: “ad = bc”

Decimos que:  si y sólo si ad = bc

Comprobamos:  si y solo si 3 por 8 = 6 por 4

* m: Verdadera
* n: Verdadera

Por tanto, m  n es verdadera.

Así, para que una equivalencia entre proposiciones sea verdadera, deben ser verdaderas las dos proposiciones que la formen o deben ser falsas las dos.

1. Sean

* p(x) = x es número par
* q(x) = x al cuadrado es número par

p(x)  q(x): "Si x es par, x al cuadrado es par."

q(x)  p(x): "Si x al cuadrado es par, x es par."

1. Escribe dos ejemplos que prueben la veracidad de las dos proposiciones anteriores:

Si dentro del universo de los números naturales, tenemos las proposiciones abiertas:

* p(x) = x es número par
* q(x) = x al cuadrado es número par

1. Sean

* p(x) = x es número par
* q(x) = x al cuadrado es número par

p(x)  q(x): "Si x es par, x al cuadrado es par."

q(x)  p(x): "Si x al cuadrado es par, x es par."

1. Escribe dos ejemplos que prueben la veracidad de las dos propo­siciones anteriores:

Si dentro del universo de los números naturales, tenemos las propo­siciones abiertas:

"x es par"

"x es múltiplo de 2"

Tenemos que p  q, porque todo número par, es múltiplo de 2, y todo múltiplo de dos, es par.

Si formamos los conjuntos determinados por las dos proposiciones:

1. P = {x / x es par}

P = {0, 2, 4,6,...}

1. Q = {x / x es múltiplo de 2}

Q = {0, 2, 4, 6,...}

Observa que P = Q, pues los dos están formados por los mismos ele­mentos.

Podemos afirmar entonces que:

Dos proposiciones abiertas equivalentes generan conjuntos iguales, dentro del mismo universo.

¿Podemos decir que: P contenido en Q y que Q contenido en P? ¿Es decir todo x que pertenece a P, también x pertenece a Q? ¿Y todo x en Q, también x pertenece a P?

Por lo tanto, si tenemos A contenido en B y B contenido en A, podemos decir que A = B.



### Práctica lo aprendido

1. Si tienes las proposiciones:

* "x es número natural que termina en cero"
* "x es múltiplo de 10".

1. Determina los conjuntos, dentro del universo de los números naturales

A = {x/x es número natural que termina en cero}

B= {x/x es múltiplo de 10}

1. ¿Será cierto que A = B?
2. ¿Será siempre verdadera la proposición "x es múltiplo de 10 si y solo si x termina en cero?
3. Completa lo siguiente:

Si tenemos los conjuntos:

U = {x / x es dígito}

M = {x/ x es par}

N = {x / x es primo}

Encuentre:

* 1. M intersección N
  2. M complemento
  3. N complemento
  4. M intersección N complemento
  5. M complemento unión N complemento

¿Será cierto que: (M  N)' = M' U N'?

1. A partir de las siguientes proposi­ciones abiertas en el universo de las letras del abecedario español y realiza en ellos lo que se te pide:

* a (x): "x es vocal de la palabra educación"
* b (x): "x es vocal de la palabra Eloísa"
* c (x): "x es vocal del abecedario".
  1. Determina los conjuntos que se forman
* A = { x / x es vocal de la palabra Educación}
* B = { x / x es vocal de la palabra Eloísa}
* C = { x / x es vocal del abecedario}
  1. Elabora un diagrama que represente a los conjuntos anteriores.
  2. Escribe el signo contenencia o no contenencia entre los conjuntos:

1. A y B
2. B y C
3. A y C
4. B y A
5. C y B
6. C y A
7. A y A
8. B y B
9. C y C
   1. Escribe el signo equivalencia o no equivalencia entre las proposiciones:

* x pertenece a A y x pertenece a B
* x pertenece a B y x pertenece a C
* x pertenece a A y x pertenece a C
  1. Escribe el signo igual o diferente entre los conjuntos

1. A y B
2. B y C
3. A y C
4. A y A

# TEMA 2. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

LA MATEMÁTICA EN LA HISTORIA:

Los números naturales surgen de dos necesidades básicas del hombre primitivo: contar y ordenar.

El hombre primitivo logró establecer una correspondencia entre las partes de su cuerpo (manos, pies, brazos y piernas), lo que deseaba contar. De esta forma, aso­ció a cada objeto una marca o signo que le permitió hacer una clara distinción entre una o varias unidades. Así, aparecieron los primeros símbolos gráficos y la huma­nidad empezó a concebir la idea de número.

Con el paso del tiempo, cada cultura adoptó un conjunto de símbolos y reglas para representar y operar cantidades, dando origen a los llamados sistemas de nume­ración.

## SISTEMA DE NUMERACIÓN ROMANO

El sistema de numeración romano se desarrolló en la antigua Roma.

En este sistema, se utilizan los símbolos I, V, X, L, C, D y M, donde cada uno de ellos representa un valor determinado. Así:

Tabla 28: Símbolos en números romanos.

| Número romano | Valor que representa |
| --- | --- |
| I | 1 |
| V | 5 |
| X | 10 |
| L | 50 |
| C | 100 |
| D | 500 |
| M | 1.000 |

Para representar cantidades en el sistema de numeración romano, se deben tener en cuenta las siguientes reglas:

1. Toda letra escrita a la derecha de otra igual o de mayor valor, suma su  
   valor a esta. Por ejemplo:

* 11 se representa como XI (10 + 1).
* 150 se representa como CL (100 + 50).

1. Toda letra escrita a la izquierda de otra de mayor valor, resta su valor  
   a esta. Por ejemplo:

* 4 se representa como IV (5 - 1).
* 90 se representa como XC (100 - 10).

La letra I sólo resta a V y X. La letra X sólo resta a L y C. La letra C sólo resta a D y M. Las letras V, L y D siempre suman y no pueden estar a la izquierda de una letra de mayor valor. No se permiten dos letras consecutivas restando

1. No se pueden emplear más de tres símbolos (I, X, C o M) del mismo valor. Por ejemplo:

* 14 se representa como XIV y no como XIIII.

1. No se pueden emplear consecutivamente y más de una vez las letras V, L y D.
2. Un guión puesto en la parte superior de una letra, multiplica su valor 5 por 1000. Por ejemplo:

*  representa 5000
*  representa 100.000

ALGO IMPORTANTE: Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que permiten formar números.

**Ejemplo:**

1. Determinar el error en la notación de cada número:
2. 19: XVIIII
3. 45: VL
4. 150: LLL

**SOLUCIÓN**

El siguiente cuadro resume la respuesta.

Tabla 29: Errores en la escritura.

| Número | Notación Errónea | Notación Correcta | Motivo |
| --- | --- | --- | --- |
| 19 | XVIIII | XIX | No se pueden emplear más de tres símbolos del mismo valor. |
| 45 | VL | XLV | Las letras V, L y D siempre suman y no se pueden ubicar a la izquierda de una letra de mayor valor. |
| 150 | LLL | CL | No se pueden emplear consecutivamente y más de una vez, las letras V, L y D. |

1. Escribir cada número representado.
2. CLXXVII
3. 

SOLUCIÓN

1. CLXXVII = 100 + 50 + 20 + 5 + 2 = 177
2.  = 40.000 + 300 + 14 = 40.314

ALGO IMPORTANTE: El valor de los números romanos queda multiplicado por mil tantas veces como guiones haya en su parte superior.

Así, el número 1.125.545 se simboliza en números romanos como:

Pues:

*  = 1.000.000
*  = 125.000
* DXLV = 545

### Práctica lo aprendido

1. Escribir con números romanos los siguientes números.
2. 74
3. 83
4. 529
5. 427
6. 710
7. 966
8. 909
9. 436
10. 893
11. 1.325
12. 8.029
13. 32.350
14. Escribir en el sistema decimal los siguientes números romanos.
15. LVII
16. CXIX
17. DXL
18. DCCXV
19. CMXL
20. CDXVII
21. MDLXXII
22. MMX
23. DLXI
24. 
25. 
26. 
27. Escribir, en cada caso, el número romano mayor y el número romano menor que se puede escribir con los símbolos dados.

Tabla 30: Identificación de mayor y menor.

| Símbolos | Número Romano Mayor | Número Romano Menor |
| --- | --- | --- |
| I, L, X |  |  |
| C, V, D |  |  |
| M, X, C, I |  |  |
| M, L, D, C |  |  |

1. Leer cada enunciado. Luego, escribir el año mencionado en número romano como número.
2. En MCMLXVIII el hombre llegó a la Luna.
3. En MMII se celebró el mundial de fútbol en Japón y Corea.
4. En MCMXIII se usó por primera vez, en fotogra­fía, la película de 35 mm.
5. William Shakespeare nació en MDLXIV en Ingla­terra.
6. En MCDXVI se publicó el primer manual de danza europeo.
7. Los siguientes números romanos han sido escritos en forma incorrecta. Determinar cuál es el error y escribirlos correctamente.
8. VLII
9. XXXXIV
10. 
11. XXIIII
12. I
13. ICXCIX
14. Escribir en números romanos el año en el que nació cada personaje.
15. Ronaldinho
16. Cristóbal Colón.
17. Juanes.
18. Euclides.

## SISTEMA DE NUMERACIÓN BINARIO

El sistema de numeración binario se usa en informática para el ma­nejo de datos e información. Cada computador trabaja internamente con dos niveles de voltaje: 1 para encendido y 0 para apagado.

Un sistema de numeración recibe su nombre a partir de la cantidad de símbolos que se usan en la escritura de números. A este número se le denominaba base. Por ejemplo, el sistema de numeración en base 6, se com­pone de las cifras 0, 1,2, 3, 4, 5.

El sistema de numeración binario es un sistema en el cual se utilizan úni­camente dos dígitos: 0 y 1.

Para convertir un número en base 10 a base 2, es decir, de sistema deci­mal a binario, es necesario realizar divisiones sucesivas entre 2, tenien­do en cuenta el último cociente y los residuos respectivos de cada una de las divisiones realizadas.

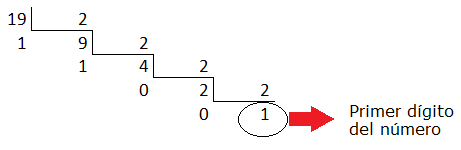
**Ejemplo:**

1. Representar los siguientes números en base 2.
2. 19
3. 32

Solución:

Al efectuar divisiones sucesivas entre 2, se tiene que:

Imagen 23: 19 a binario

1. 

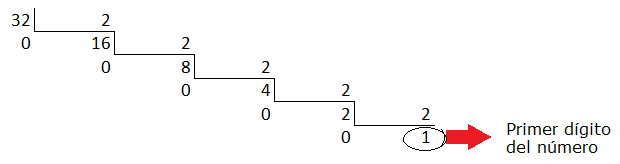
**Descripción imagen:** Imagen del proceso de división secuencial de 19 entre 2 de la siguiente manera:

* 19 dividido 2 cociente 9 residuo 1.
* 9 dividido 2 cociente 4 residuo 1.
* 4 dividido 2 cociente 2 residuo 0.
* 2 dividido 2 cociente 1 residuo 0.

El número 1 del último cociente está encerrado en un círculo negro y tiene hacía su izquierda una flecha roja que dice “Primer dígito del número”



Imagen 24: 32 a binario

1. 

**Descripción imagen:** Imagen del proceso de división secuencial de 32 entre 2 de la siguiente manera:

* 32 dividido 2 cociente 16 residuo 0.
* 16 dividido 2 cociente 8 residuo 0.
* 8 dividido 2 cociente 4 residuo 0.
* 4 dividido 2 cociente 2 residuo 0.
* 2 dividido 2 cociente 1 residuo 0.

El número 1 del último cociente está encerrado en un círculo negro y tiene hacía su izquierda una flecha roja que dice “Primer dígito del número”



Para convertir un número en base 2 a base 10, es decir, de sistema bina­rio a decimal, se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Ubicar el número binario en una tabla de orden, con el fin de que a cada cifra le corresponda una potencia de 2.
2. Multiplicar cada cifra del número binario por la potencia de 2 respec­tiva y sumar los productos obtenidos. El número que resulta será el número binario representado en el sistema de numeración decimal.

**Ejemplo:**

Representar el número 1 0 1 1 0 1 base 2 en base 10.

Solución:

Se ubica el número en una tabla de orden. Así,

Tabla 31: Transformación de Binario a decimal.

| Posición | Potencia de 2 | Número Binario |
| --- | --- | --- |
| Sexta | 2 a la 5 | 1 |
| Quinta | 2 a la 4 | 0 |
| Cuarta | 2 a la 3 | 1 |
| Tercera | 2 a la 2 | 1 |
| Segunda | 2 a la 1 | 0 |
| Primera | 2 a la 0 | 1 |

Se multiplica cada cifra del número por la potencia de dos respectiva y se suman los productos obtenidos. Como se muestra a continuación:



= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1

= 45

Luego, 1 0 1 1 0 1 base 2 = 45

Para sumar o multiplicar dos o más números en base 2, se deben tener en cuenta las siguientes sumas y productos fundamentales:

Sumas:

1. 0+0=0
2. 0+1=1
3. 1+0=1
4. 1 + 1 = 10

Productos:

1. 0X0=0
2. 0X1=0
3. 1X0=0
4. 1X1=1

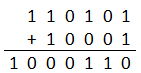
**Ejemplo:**

Efectuar las siguientes operaciones entre números binarios:

1. 1 1 0 1 0 1 base 2 + 1 0 0 0 1 base 2
2. 1 0 0 1 base 2 X 1 0 1 base 2

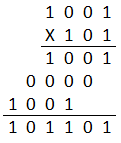
Solución:

Imagen 25: Proceso de Suma

1. 

**Descripción Imagen:** Suma de 1 1 0 1 0 1 con 1 0 0 0 1 = 1 0 0 0 1 1 0.

Imagen 26: Multiplicación de Binarios

1. 

**Descripción Imagen:** Producto de 1 0 0 1 con 1 0 1, barra negra al piso, Subproducto 1: 1 0 0 1, subproducto 2: 0 0 0 0 iniciando de derecha a izquierda debajo del primer cero de derecha a izquierda del subproducto anterior, subproducto 3: 1 0 0 1 iniciando de izquierda a derecha debajo del segundo cero de izquierda a derecha del producto anterior con barra negra al piso, resultado: 1 0 1 1 0 1 iniciando debajo del primer 1 de derecha a izquierda del subproducto 3.

### Práctica lo aprendido

1. Escribir los siguientes números en base 2.
2. 9
3. 17
4. 25
5. 50
6. 92
7. 309
8. 110
9. 458
10. 227
11. 530
12. 1.320
13. 3.020
14. Unir las expresiones equivalentes.
15. VI
16. 580
17. 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0
18. DLXXX
19. 6.000
20. 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0
21. Escribir los siguientes números en base 10.
22. 1 0
23. 1
24. 1 1
25. 1 0 1
26. 1 1 0
27. 1 1 1
28. 1 0 0 0
29. 1 0 1 0
30. 1 0 0 1
31. 1 0 0 1 0
32. 1 1 0 1 1
33. 1 0 0 0 1
34. Resolver las siguientes operaciones.
35. 1 0 0 1 + 1 0 0 1
36. 1 0 0 X 1 0 0
37. 1 1 1 1 0 + 1 1 1 1 1
38. 1 0 1 X 1 0 0
39. Resolver las operaciones. Luego, completar el texto con las palabras correspondientes.

Operaciones:

1. Marte: 1 1 1 1 + 1 0 1 1
2. Maia: 1 0 0 0 1 + 1 0 1
3. Juno: 1 0 1 0 1 + 1 0 0 0 1
4. Augustus: 1 1 0 0 + 1 1
5. Jano: 1 1 1 0 0 + 1 0 1 0 1 0

**Los nombres de los meses:**

Los nombres de los meses del año tienen su origen en el latín: Algunos hacen referencia a dioses y otros a números. Por ejemplo, marzo es (1 1 0 1 0), mayo es (1 0 1 1 0), junio es (1 0 0 1 1 0), agosto es (1 1 1 1), enero es (1 0 0 0 1 1 0).

## SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

El sistema de numeración en base 10 está formado por las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y recibe el nombre de sistema de numeración decimal.

El sistema de numeración decimal es, sin duda, el más usado en todo el mundo (excepto algunas culturas). Inicialmente, se desarrolló en la India y luego fue adaptado y perfeccionado por los árabes e introducido en Europa en el siglo XII.

Este sistema de numeración es posicional, lo cual significa que el valor de cada dígito depende de su posición dentro del número. En este siste­ma, cada 10 unidades representan una unidad de orden inmediatamente superior. Por ejemplo, 10 unidades representan una decena y 10 decenas representan una centena.

El siguiente cuadro muestra el valor de posición de cada una de las cifras de un número en el sistema de numeración decimal:

Tabla 32: Valor de posición en el Sistema Decimal

| Nombre del valor de posición | Unidades de millón | Centenas de mil | Decenas de mil | Unidades de mil | Centenas | Decenas | Unidades |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Símbolo | Um | CM | DM | UM | C | D | U |
| Valor | 1.000.000 | 100.000 | 10.000 | 1.000 | 100 | 10 | 1 |
| Valor en notación exponencial | 10 a la 6 | 10 a la 5 | 10 a la 4 | 10 a la 3 | 10 a la 2 | 10 a la 1 | 10 a la 0 |

De esta manera, un número en el sistema de numeración decimal puede ser representado utilizando tres tipos de notación: polinómica, exponen­cial y según el nombre de posición de cada cifra.

* Polinómica. El número se expresa teniendo en cuenta el valor de posi­ción de cada una de sus cifras. Por ejemplo, el número 719 puede ser expresado como:

700 + 10 + 9

* Exponencial. El número se expresa teniendo en cuenta el valor de posi­ción de cada una de sus cifras en forma exponencial. Por ejemplo, el número 254 puede ser expresado como:



* Según el nombre de posición de cada cifra. El número se expresa teniendo en cuenta el nombre del valor de posición de cada una de sus cifras. Por ejemplo, el número 983 puede ser expresado como:

9C + 8D + 3U

**Ejemplo:**

1. Determinar el valor de posición de cada una de las cifras de los siguientes números. Luego, escribir cada número en forma polinó­mica, exponencial y según el nombre de posición de sus cifras.
2. 42.719
3. 3.258.017

**Solución**

Al ubicar cada número en la tabla de valores, se tiene que:

Tabla 33: Números en sistema decimal.

| Nombre del valor de posición | Unidades de millón | Centenas de mil | Decenas de mil | Unidades de mil | Centenas | Decenas | Unidades |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Símbolo | Um | CM | DM | UM | C | D | U |
| Valor | 1.000.000 | 100.000 | 10.000 | 1.000 | 100 | 10 | 1 |
| Valor en notación exponencial | 10 a la 6 | 10 a la 5 | 10 a la 4 | 10 a la 3 | 10 a la 2 | 10 a la 1 | 10 a la 0 |
| Número |  |  | 4 | 2 | 7 | 1 | 9 |
| Número | 3 | 2 | 5 | 8 | 0 | 1 | 7 |

* 1. 42.719

El valor de 4 de acuerdo con su posición es 4 X 10.000 = 40.000

El valor de 2 de acuerdo con su posición es 2 X 1.000 = 2.000

El valor de 7 de acuerdo con su posición es 7 X 100 = 700

El valor de 1 de acuerdo con su posición es 1 X 10 = 10

El valor de 9 de acuerdo con su posición es 9 X 1 = 9

* Notación polinómica

40.000 + 2.000 + 700 + 10 + 9

* Notación exponencial



* Notación según el nombre de posición de sus cifras  
  4DM + 2UM + 7C + ID + 9U
  1. 3.258.017

El valor de 3 de acuerdo con su posición es 3 X 1.000.000 = 3.000.000

El valor de 2 de acuerdo con su posición es 2 X 100.000 = 200.000

El valor de 5 de acuerdo con su posición es 5 X 10.000 = 50.000

El valor de 8 de acuerdo con su posición es 8 X 1.000 = 8.000

El valor de 1 de acuerdo con su posición es 1 X 10 = 10

El valor de 7 de acuerdo con su posición es 7 X 1 = 7

* Notación polinómica

3.000.000 + 200.000 + 50.000 + 8.000 + 10 + 7

* Notación exponencial



* Notación según el nombre de posición de sus cifras  
  3Um + 2CM + 5DM + 8UM + ID + 7U

1. Escribir el número que corresponde a la notación dada.
   1. 
   2. 9Um + 8CM + 1UM + 3C + ID + 5U

**Solución**

* + - * 1. En la notación exponencial de este número no aparecen todas las poten­cias de 10 en su orden. En su lugar, se escribe el número 0. Así, el número que corresponde a la notación descrita es 50.390.749.
        2. 9Um + 8CM + 1UM + 3C + ID + 5U. El número que corresponde a la notación descrita es 9.801.315.

1. Según el DANE (Departamento Administrativo Nacional de Estadís­tica), el número de habitantes en Colombia en 1.993, era: 4 decenas, 3 unidades de millón, 9 unidades de mil, 3 decenas de millón, 8 cen­tenas y 1 centena de mu. ¿Cuántos habitantes tenía Colombia en 1.993?

Solución:

Al ubicar cada valor en la tabla de orden respectiva, se tiene que:

Tabla 34: Número ubicado en el sistema decimal

| Decenas de millón | Unidades de millón | Centenas de mil | Decenas de Mil | Unidades de mil | Centenas | Decenas | Unidades |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Dm | Um | CM | DM | UM | C | D | U |
| 10.000.000 | 1.000.000 | 100.000 | 10.000 | 1.000 | 100 | 10 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 0 | 9 | 8 | 4 | 0 |

Luego, Colombia tenía 33.109.840 habitantes en el año 1.993.

### Práctica lo aprendido

* + - 1. Escribir cada número en notación polinómica, exponencial y de acuerdo con el nombre de la posición de sus cifras.
         1. 17.059
         2. 45.605
         3. 131.003
         4. 10.008.532
         5. 296.010
         6. 1.646.050
         7. 3.003.005
         8. 29.154.000
      2. Escribir cada número de acuerdo con las condiciones dadas.
         1. El mayor y menor número de siete cifras con 6 decenas y 3 unidades de millón
         2. El mayor y menor número que se pueda escribir con los dígitos 8, 2, 0, 4, 8, 5.
         3. El mayor y menor número de nueve cifras donde 9 vale 900.
         4. El mayor y menor número de seis cifras que se pueda construir con 1 y 9.
         5. El mayor y el menor número de siete cifras.
         6. El mayor y el menor número de diez cifras.
      3. Escribir en notación polinómica los datos del Sol.

Tabla 35: Datos del Sol

| Dato | Valor |
| --- | --- |
| Edad | 5 X 10 a la 3 millones de años |
| Diámetro | 1 X 10 a la 7 + 3 X 10 a la 6 + 9 X 10 a la 5 + 2 X 10 a la 4 km |
| Masa | 3 X 10 a la 5 + 3 X 10 a la 4 + 2 X 10 a la 3 + 9 X 10 a la 2 + 4 X 10 a la 1 kg |
| Distancia a la Tierra | 150 X 10 a la 6km |
| Temperatura del núcleo | 14 X 10 a la 6 °C |
| Temperatura de la superficie | 5 X 10 a la 3 + 5 X 10 a la 2 °C |
| Esperanza de vida | 5 X 10 a la9 años |

* + - 1. Si el diámetro de Urano es5 X 10 a la 4 + 1 X 10 a la 3 + 1 X 10 a la 2 + 1 X 10 a la 1 + 3 X 10 a la 0, ¿cuál es la diferencia entre el diámetro del Sol y el de Urano?
      2. Ganimedes, una de las lunas de Júpiter, tiene un diámetro de 5 X 10 a la 3 + 2 X 10 a la 2 + 6 X 10 a la 1 + 2 X 10 a la 0 km. ¿Qué diámetro tiene?
      3. En la tabla se registra el área en km2 de los seis paí­ses más grandes del mundo.

Tabla 36: Área de los países

| País | Área (km2) |
| --- | --- |
| Canadá | 9.330.970 |
| Brasil | 8.456.510 |
| Rusia | 17.075.400 |
| China | 9.326.410 |
| Australia | 7.617.930 |
| EE.UU | 9.166.600 |

* 1. ¿Cuál es el país con mayor área?
  2. ¿Cuál es el tercer país más grande del mundo?
  3. ¿Qué países tienen mayor área que China?
  4. Escribir en notación polinómica el área de los países más pequeños.
  5. ¿Cuáles son los países cuyas unidades de millón en sus áreas es igual?
  6. ¿Cuál es el país cuya área tiene la mayor unidad
     + 1. Encontrar el número cuya cifra de las unidades es el doble de 2; la diferencia entre las decenas de mil y centenas es 1, y su producto es 6. La cifra de las decenas es cinco unidades mayor que la cifra de las unidades, y la cifra de las uni­dades de mil es el cuádruplo de 2.
       2. Encontrar el mayor número de seis dígitos que se puede formar con los números del 0 al 5.
       3. Encontrar el menor número de seis dígitos que se puede formar con 1, 3, 5, 7 y 9.
       4. Encontrar el mayor y el menor número de siete cifras que se puede formar con 1 y 0.
       5. Encontrar el mayor número de 10 cifras que se puede formar con los dígitos sin repetir ci­fras.
       6. La máquina que se muestra a continuación transforma números. Determinar qué número resulta al final del proceso si se introducen en ella las cantidades dadas.

Proceso:

Suma 1 base 2

Multiplica por 11 base 2

Suma el mismo número

Multiplica por 10 base 2

Cantidades:

1. 1 1 0 1 base 2
2. 1 0 0 1 base 2
3. 1 0 1 0 1 0 1 base 2
4. 1 0 0 0 0 1 base 2

# TEMA 3: OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son aquellos que sirven para contar los elemen­tos de un conjunto determinado. El conjunto de los números naturales se simboliza con la letra N mayúscula y se determina por extensión de la siguiente manera:

* N = {1,2, 3, 4, 5,...}

Los elementos del conjunto N se pueden representar en una semirrecta numérica.

En el conjunto de los números naturales se definen las siguientes opera­ciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radi­cación y logaritmación.

## ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Dados a, b, c que pertenecen a N, se define la suma o adición como:

* a + b = c

Donde a y b se denominan sumandos y c suma o total.

Por ejemplo, en la operación 11 + 8 = 19, 11 y 8 son los sumandos y 19 es la suma o total.

La adición en el conjunto de los números naturales cumple con las siguientes propiedades:

Tabla 37: Propiedades de la Adición.

| Nombre | Definición | Ejemplo |
| --- | --- | --- |
| Clausurativa | Si a, b  N entonces,  a + b  N | 2 + 5 = 7 En efecto, 2  N, 5  N y 7  N |
| Conmutativa | Si a, b  N entonces,  a + b = b + a | 2+5=5+2 En efecto,  7 = 7 |
| Asociativa | Si a, b, c  N entonces, a + (b + c) = (a + b) + c | 2 + (5 + 3) = (2 + 5) + 3 En efecto, 10 = 10 |
| Modulativa | Si a  N entonces, a+0=0+a=a | 5+0=0+5=5 |

## SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES

La sustracción es la operación inversa a la adición. Es decir, conocidos la su­ma y uno de los sumandos, la sustracción permite hallar el otro sumando.

Dados a, b, c  N y a> b, se define la resta o sustracción como:

* a - b = c siempre que a = b + c

a se denomina minuendo, b sustraendo y c diferencia.

Por ejemplo, 13 - 8 = 5, ya que 5 + 8 = 13. En este caso, 13 es el minuendo, 8 el sustraendo y 5 la diferencia.

**Ejemplos:**

1. Si a, b, c, d, e, f  N y, además, a + b = 5, c + d = 13 y e + f = 19, utilizar las propiedades de la adición para hallar el valor de las siguientes sumas:
2. a + c + b + d
3. a + 0 + b + e + f

**Solución:**

1. a + c + b + d

= a + b + c + d Propiedad conmutativa.

= (a + b) + (c + d) Propiedad asociativa.

= 5 + 13 Se remplaza.

= 18

1. a + 0 + b + e + f

= (a + 0) + (b + e + f) Propiedad asociativa.

= a + (b + e + f) Propiedad modulativa.

= (a + b) + (e + f) Propiedad asociativa.

= 5 + 19 Se remplaza.

= 24

1. Mostrar con un ejemplo que la sustracción de números naturales no cumple con las propiedades clausurativa, conmutativa y asociativa.

**Solución:**

Tabla 38: Propiedades de la Sustracción.

| Propiedad | Ejemplo |
| --- | --- |
| Clausurativa | 9  N, 13  N pero 9 - 13  N |
| Conmutativa | 15 – 6 = 9  N, pero 9 - 15  N. Luego, 15 – 6  6 – 15. |
| Asociativa | 13 - (8 – 5) = 13 – 3 = 10 pero (13 – 8) – 5 = 5 – 5 = 0. Luego, 13 – (8 – 5)  (13 – 8) - 5 |

1. Si a = 1.019, b = 3.545, c = 1.3017 y d = 8.940, efectuar las siguien­tes operaciones:
2. a + b + c + d
3. (a + c) - (b + d)

**Solución:**

1. a + b + c + d

= 1.019 + 3.545 + 13.017 + 8.940 Se remplazan valores.

= (1.019 + 3.545) + (13.017 + 8.940) Se aplica la propiedad asociativa.

= 4.564 + 21.957 Se efectúan las sumas indicadas.

= 26.521

1. (a + c) - (b + d)

= (1.019 + 13.017) - (3.545 + 8.940) Se remplazan valores.

= 14.036 – 12.485 Se efectúan las sumas indicadas.

= 1.551 Se efectúa la resta indicada.

1. La siguiente tabla muestra el precio de algunos textos escolares para grado 6°

Tabla 39: Textos Escolares.

| Texto | Precio |
| --- | --- |
| Matemáticas | 42.550 |
| Español | 39.990 |
| Inglés | 37.525 |
| Sociales | 34.100 |
| Religión | 21.900 |

1. ¿Cuánto más cuesta el libro de matemáti­cas que el de inglés?
2. Si Angélica debe comprar los cinco textos, ¿cuánto debe pagar por ellos?
3. Angélica tiene $250.000 para comprar los cinco textos, ¿cuánto dinero le quedará después de la compra?

**Solución:**

1. Para saber cuánto más cuesta el libro de matemáticas que el de inglés, se plantea y resuelve la operación:

42.550 – 37.525 = 5.025

Luego, el libro de matemáticas cuesta $5.025 más que el libro de inglés.

1. Para saber cuánto debe pagar Angélica por los cinco textos, se plantea y se resuelve la operación:

42.550 + 39.990 + 37.525 + 34.100 + 21.900

= 176.065

Luego, Angélica deberá pagar $176.065 por los cinco textos.

1. Para saber cuánto dinero le queda a Angélica, se plantea y resuelve la ope­ración:

250.000 – 176.065

= 73.935

Luego, le quedan $73.935.

### Práctica lo aprendido

1. Agrupar y cambiar el orden de los términos para poder calcular las sumas mentalmente.
2. 98 + 3 + 97 + 2
3. 700 + 298 + 300 + 2
4. 106 + 15 + 4 + 10
5. 397 + 13 + 2 + 8
6. 326 + 4 + 14 + 6
7. 893 + 60 + 7 + 14
8. 7 + 135 + 13 + 15
9. 100 + 27 + 50 + 3
10. Escribir igual o diferente según corresponda.
11. 58 + 23 y 23 + 58
12. 62 - 13 y 13 – 62
13. 72 + 0 + 27 y 72 + 27
14. 28 + 0 y 28 - 0
15. 34 - (7 + 8) y (34 - 7) + 8
16. 93 - (25 - 3) y (93 - 25) + 3
17. (33 - 12) - 7 y 33 - (12 + 7)
18. Determinar el valor de cada expresión teniendo en cuenta las condiciones.
19. m + (n + t) + s si m + n = 6 y t + s = 12.
20. (a + b) + (c + d) si a + d = 12 y b + c = 15.
21. x + (z + n) + (w + p) + (k + l) si x + z = 12, n + k = 8, w + l = 20 y p = 5.
22. (a + m) + n - t + (b - j) si a + m = 20, n - t = 15, b – j = l.
23. t + s + (a + b) + w + x si w + s = 12, a + b = 20 y t + x = 35.
24. Hallar el valor de x que cumple la igualdad.
25. x + 173 =603
26. x - 236 = 753
27. (x - 25) + 36 = 71
28. 72 + 46 - x = 18
29. 234 + x =536
30. 353 - x = 190
31. (97 + 3) + x = 1.100
32. 136 + (36 + x) = 835
33. 365 - x + (35 + 22) = 138
34. 43 + x - (36 - 5) = 100
35. Unir las expresiones de la lista 1 con los que dan el mismo resultado de la lista 2.

**Lista 1:**

1. 176 – 53
2. 426 + 698
3. (36 + 45) + 16
4. 93 + (36 - 25)
5. (87 + 153) – 157
6. 187 - 36 – 18

**Lista 2:**

1. 36 + 47 + 50
2. 64 - 25 + (60 - 2)
3. 836 + 188 + 100
4. 50 + (105 - 32)
5. (93 - 6) – 4
6. 63 + 20 + 22
7. En un supermercado los días domingo son de oferta para los electrodomésticos. A continuación se muestran algunas de estas ofertas.

Tabla 40: Electrodomésticos

| Electrodoméstico | Precio Sábado | Precio Domingo |
| --- | --- | --- |
| Lavadora | 1.250.000 | 1.150.000 |
| Televisor | 6.350.000 | 5.750.000 |
| Equipo de sonido | 1.750.000 | 980.000 |
| D.V.D | 265.000 | 179.990 |

1. ¿Cuál es la diferencia al comprar un equipo de sonido, un televisor y dos DVD entre el sábado y el do­mingo?
2. ¿Cuál electrodoméstico tiene un mayor descuento?
3. ¿Cuál es el mayor número de electrodomésticos que puede comprar una persona el día domingo si lleva $10.000.000?
4. Por la compra de tres o más televisores, cualquier día de la semana, hay un descuento de $800.000. ¿Es más económico comprar tres televisores entre semana o el domingo?
5. Escribir y calcular las expresiones aritméticas.
6. El minuendo es 5.342 y la diferencia 2.328. ¿Cuál es el sustraendo?
7. La diferencia entre 18.239 y 2.354 aumentada en 545.
8. A 790 se le suma 78 y a este resultado se le resta la suma de 345 y 95.
9. Si dos números suman 136.723 y uno es el triple de 826, ¿cuál es el otro sumando?
10. El sustraendo es 3.475 y el minuendo es el sus­traendo aumentado en 1.725, ¿cuál es la diferencia?
11. Inventar una pregunta para cada situación. Luego, responderla.
12. En una ciudad hay registrados 136.726 extranje­ros. La ciudad cuenta con 1.223.538 habitantes.
13. Claudia tiene 15 años, su primo Carlos tiene 8 años más que ella, Andrea tiene el doble de años que Claudia y su hermano tiene 10 años menos que Andrea.
14. Carlos vendió su carro en $8.500.000 y ganó $3.750.000.
15. Si mi hermana tuviera 15 años menos tendría 51 años y si mi primo tuviera 16 años más ten­dría 23 años.

## MULPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Dados a, b, c  N, se define la multiplicación o producto como a X b = c donde a y b se denominan factores y c producto

.

Por ejemplo, en la operación:

7 X 4 = 28, 7 y 4 son los factores y 28 el pro­ducto.

### PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

La multiplicación en el conjunto de los números naturales, cumple con las siguientes propiedades:

Tabla 41: Propiedades de la multiplicación.

| Nombre | Definición | Ejemplo |
| --- | --- | --- |
| Clausurativa | Si a, b  N entonces, a X b  N | 9 X 4 = 36. En efecto, 9  N, 4  N y 36  N. |
| Conmutativa | Si a, b  N entonces, a x b = b x a | 9 X 4 = 4 X 9. En efecto, 36 = 36 |
| Asociativa | Si a, b, c  N entonces, a X (b X c) = (a X b) X c | 2 X (5 X 4) = (2 X 5) X 4 En efecto, 2 X 20 = 10 X 4. De donde: 40 = 40 |
| Modulativa | Si a  N entonces, a X 1 = 1 X a | 7 X 1 = 1 X 7 = 7 |
| Distributiva | Si a, b, c  N entonces, a X (b + c) = (a X b) + (a X c) | 5 X (6 + 4) = (5 X 6) + (5 X 4). En efecto, 5 X 10 = 30 + 20. De donde: 50 = 50. |

**Ejemplo:**

Si a, b, c, d, e, f  N y, además, a X b = 20, c X d = 12 y e = 5, utilizar las propiedades de la multiplicación para hallar el valor de las siguien­tes sumas:

1. a X e X b
2. a X c X b X 1 X d

**Solución:**

1. a X e X b

= a X b X e Propiedad conmutativa.

= (a X b) X e Propiedad asociativa.

= 20 X 5 a X b = 20 y e=12

= 100

1. a X c X b X 1 X d

= (a X b X c) X (d X 1) Propiedad conmutativa y asociativa.

= (a X b X c) X d Propiedad modulativa.

= (a X b) X (c X d) Propiedad asociativa.

= 20 X 12 a X b = 20 y c X d = 12

= 240

### MULTIPLICACIONES ABREVIADAS

Existen multiplicaciones que se pueden resolver con mayor facilidad siguiendo unas reglas específicas. Algunas de estas multiplicaciones son:

* Multiplicación de un número por una potencia de 10. Para multiplicar cualquier número natural por una potencia de 10, se escribe el mismo número y se acompaña de tantos ceros como tenga la potencia de 10.

Por ejemplo, 15 X 100 = 1.500

173 X 1.000 = 173.000

* Multiplicación de un número por 11, 12,..., 19. Para multiplicar cual­quier número natural por un número de dos cifras que presente tan sólo una decena, se expresa la multiplicación en forma horizontal y se multiplica el primer número por la cifra de las unidades del segundo número. Luego, se escribe este producto de derecha a izquierda a par­tir del signo X y se realiza la suma correspondiente.

Por ejemplo, 215 X 13. Se expresa la multiplicación en forma horizontal.

645 Se multiplica 215 por 3

2.795 Se efectúa la suma correspondiente.

* Multiplicación por 5: Para multiplicar cualquier nú­mero natural por 5, se divide entre dos la cifra que se va a multiplicar y al resultado se le agrega un cero. Por ejemplo, 36 X 5 = 180.
* Multiplicación por 11: Para multiplicar un número natural de dos cifras por 11, se suman dichas cifras y el resul­tado se escribe en el centro.

Por ejemplo, 27 X 11 = 297

**Ejemplos:**

1. Efectuar las siguientes multiplicaciones:
2. 27 X 10.000
3. 85 X 3.000
4. 327 X 154

**Solución**

1. 27 X 10.000 = 270.000
2. 85 X 3.000 = 255.000
3. 327 X 15 Se expresa la multiplicación en forma horizontal.

1.635 Se multiplica 327 por 5.

4.905 Se efectúa la suma correspondiente.

1. Hallar el resultado de los siguientes enunciados:
2. El doble de 27.
3. El doble de 75 aumentado en 15.
4. El triple de 36 disminuido en 8.

**Solución**

Expresiones verbales tales como "el doble" o "el triple", son expresiones mate­máticas relacionadas con productos. Así,

1. El doble de 27 se puede expresar como:

2 X 27 = 54

1. El doble de 75 aumentado en 15 se puede expresar como:

(2 X 75) + 15 = 150 + 15 = 165

1. El triple de 36 disminuido en 8 se puede expresar como

(3 X 36) - 8 = 108 - 8 = 100

1. La tabla muestra la longitud de cinco pistas de automovilismo.

Tabla 42: Longitud de las Pistas

| Pista | Longitud |
| --- | --- |
| 1 | 2.387 |
| 2 | 3.224 |
| 3 | 4.365 |
| 4 | 1.913 |
| 5 | 5.429 |

1. ¿Cuántos metros recorrerá un automóvil si da nueve vueltas en la pista 3?
2. ¿Cuántos metros más recorre un automóvil que da seis vueltas en la pista 5, que otro automóvil que da tres vueltas en la pista 1?

**Solución**

1. La distancia recorrida por un automóvil al dar nueve vueltas en la pista 3, está dada por la expresión, 9 X 4.365 = 39.285.

Luego, un automóvil que da nueve vueltas en la pista 3, recorre una dis­tancia de 39.285 m.

1. La distancia recorrida por un automóvil al dar seis vueltas en la pista 5, está dada por la expresión, 6 X 5.429 = 32.574.

La distancia recorrida por un automóvil al dar tres vueltas en la pista 1, está dada por la expresión, 3 X 2.387 = 7.161.

Para determinar cuánto más recorre un automóvil que el otro, se plantea y se resuelve la sustracción, 32.574 – 7.161 = 25.413.

Luego, un automóvil que da seis vueltas en la pista 5, recorre 25.413 m más que un automóvil que da tres vueltas en la pista 1.

### Práctica lo aprendido

1. Utilizar las propiedades de la multiplicación para que se cumpla la igualdad, determinando los valores de a, b, c.
2. 23 X 79 = a
3. 45 X 62 = 62 X a
4. 4 X (6 + 3) = 4 X a + b X 3
5. 7 X a = 5 X b
6. 9 X (8 X a) = (9 X 8) X 7
7. (11 X a) X b = c X (6 X 4)
8. Escribir el valor de cada expresión teniendo en cuenta las condiciones dadas.
9. a X b X (c X d)

Si a X c = 81

b = 6

d = 1

1. a X (b X c) X (d X e)

Si a X d = 15

b X c = 8

e = 0

1. a X (b X c) X d

Si a X b X d = 83

c = 1

1. (a X b) X (c X d)

Si a X d = 9

b = 8

c = 5

1. Escribir y calcular cada expresión numérica.
2. El doble de la suma de 175 y 235.
3. El triple de la diferencia en­tre 845 y 579.
4. La suma de cinco veces 15 y cuatro veces 36.
5. En un torneo de fútbol participan seis equipos. Cada equipo juega con los otros dos veces. ¿Cuántos partidos se juegan en el torneo?
6. Completar la siguiente tabla multiplicando en forma abreviada.

Tabla 43: Indicación de Operaciones

| A | B | C | A por B | B por C | A por C por 10 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 36 | 11 | 45 |  |  |  |
| 52 | 100 | 12 |  |  |  |
| 329 | 10 | 72 |  |  |  |
| 15 | 783 | 96 |  |  |  |
| 25 | 14 | 1.000 |  |  |  |

1. Relacionar cada multiplicación con su producto.
2. 87 X 5
3. 326 X 9
4. 538 X 76
5. 978 X 32
6. 1.467 X 2
7. 5.111 X 8
8. 15 X 29
9. 5.216 X 6

**Productos**

1. 31.296
2. 40.888
3. 435
4. 2.934
5. Observar los datos. Luego, responder.

Tabla 44: Alimentos

| Producto | Valor |
| --- | --- |
| Hamburguesas | $5.500 |
| Pizza | $2.400 |
| Perro | $4.000 |
| Salchipapa | $3.500 |

Tabla 45: Bebidas

| Producto | Valor |
| --- | --- |
| Gaseosa 12 onzas | $800 |
| Gaseosa 15 onzas | $1.200 |
| Malteada 12 onzas | $5.000 |
| Limonada 12 onzas | $3.000 |

Marcar si la afirmación es verdadera, o si es falsa.

1. Tres hamburguesas cuestan $16.500.
2. Dos perros cuestan más que tres limonadas.
3. El perro cuesta el doble de la gaseosa 12 onzas.
4. La gaseosa cuesta el triple de la pizza.
5. El valor de la hamburguesa es cinco veces el valor de la gaseosa 15 onzas.
6. El valor de la malteada es el doble del valor de la pizza menos el valor de la gaseosa.
7. Un vendedor debe escoger entre dos opciones de salario mensual.

Opción 1:

$400.000 salario básico + $5.000 por cada venta.

Opción 2:

$450.000 salario básico + $1.000 por cada venta.

1. Si usted es quien solicita el empleo como ven­dedor, ¿qué opción permitirá ganar más dinero, para cualquier cantidad de ventas que realice?
2. Observar cada una de las siguientes secuencias. Luego, responder.

12.345.679 X 9 = 111.111.111

12.345.679 X 18 = 222.222.222

12.345.679 X 27 = 333.333.333

1. ¿Qué patrón se sigue?
2. ¿Por qué número se tendrá que multiplicar 12.345.679 para obtener 888.888.888?
3. ¿Qué patrón se repite en la siguiente secuencia?

62 X 39 = 2.418

26 X 93 = 2.418

84 X 24 = 2.016

48 X 42 = 2.016

1. ¿Cuál es la condición necesaria para que el
2. Completar los datos de cada problema con algunas de los siguientes datos. Luego, resolverlo.

* Triple
* Doble
* cuatro veces más
* seis veces más

1. Alberto tiene ( ) años, Camila tiene el ( ) de la edad de José; Lucas tiene ( ) años y José tiene ( ) la edad de Lucas. ¿Qué edad tiene cada uno?
2. Sandra compró ( ) camisetas y Felipe ( ) de Fabio. Entre todos tienen ( ) camisetas. ¿Cuántas compraron Fabio y Felipe?
3. Observar las ofertas de autos.

* Renault Megane

Cuota inicial: $7.000.000, 12 cuotas: $5.137.000

* Fiat Palio

Cuota inicial: $3.250.000, 18 cuotas: $1.900.000

* Chevrolet Corsa

Cuota inicial: $5.300.000, 10 cuotas: $1.100.000

* Chevrolet Epica

Cuota inicial: $8.500.000, 15 cuotas: $3.200.000

1. ¿Cuál de los autos es el más económico? Justificar la respuesta.

## DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

En la división de números naturales se presentan dos casos dependien­do del residuo. Estos dos casos son: división exacta y división inexacta.

**División exacta de números naturales**

La división exacta es la operación inversa a la multiplicación, ya que conocidos el producto y uno de los factores, esta permite hallar el otro factor. Una división es exacta cuando existe un número natural que multiplica­do por el divisor da como resultado el dividendo. Así,

Dados a, b, c  N, se define la división exacta como:

a  b = c siempre que a = b X c

a se denomina dividendo, b divisor y c cociente.

En este caso, el residuo de la división es 0.

Por ejemplo, 24  8 = 3, ya que 3 X 8 = 24. Así, 24 es el dividendo, 8 el divisor y 3 el cociente.

**División inexacta de números naturales**

Una división es inexacta cuando no existe un número natural que multi­plicado por el divisor da como resultado el dividendo. Así,

Dados a, b, c, r  N, se define la división inexacta como:

Imagen 27: Proceso de División Inexacta.

Imagen del proceso de división de a entre b, con residuo r y cociente c.

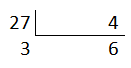
**Descripción imagen:** Letra a, a la izquierda l mayúscula en tinta invertida entre ella la letra b, debajo de la letra a, está la letra r y debajo de la letra b está la letra c.

Siempre que a = b X c + r

a se denomina dividendo, b divisor, c cociente y r residuo. En este caso, el residuo de la división es diferente a 0.

Por ejemplo,

Imagen 28: 27 dividido 4



**Descripción imagen:** Letra a, a la izquierda l mayúscula en tintainvertida entre ella la letra b, debajo de la letra a, está la letra r y debajo de la letra b está la letra c.

En este caso, 27 = (4 X 6) + 3.

27 es el dividendo, 4 el divisor, 6 el cociente y 3 el residuo

**Ejemplo:**

1. Identificar cada uno de los términos de las siguientes divisiones. Luego, determinar si son exactas o inexactas.
2. 81 dividido 3
3. 139 dividido 5

**Solución:**

1. 81 dividido 3 = 27

Dividendo: 81 Divisor: 3 Cociente: 27 Residuo: 0.

La división es exacta

1. 139 dividido 5 = 27, residuo: 4

Dividendo: 139 Divisor: 5 Cociente: 27 Residuo: 4

La división es inexacta

1. Expresar las siguientes divisiones en forma de productos.
2. 95 dividido 5
3. 127 dividido 9

**Solución:**

1. 95 dividido 5 = 19 residuo 0.

Luego, 95 = 19 X 5

1. 127 dividido 9 = 14 residuo 1

Luego, 127 = (14 X 9) + 1

1. Encontrar el número asociado a cada uno de los siguientes enunciados.
2. El triple de un número es 87.
3. Siete veces un número es igual a 126.

**Solución:**

Cada enunciado puede ser planteado mediante la multiplicación y cada núme­ro hallado mediante la división. Si D es el número buscado, entonces,

1. 3 X D = 87

D = 87  3

D = 29

1. 7 X D = 126

D = 126  7

D = 18

**Propiedades de la división**

La división en el conjunto de los números naturales, cumple únicamen­te con la siguiente propiedad.

* La división es distributiva con respecto a la suma y la resta. Así,

Si a, b, c  N, entonces,

(a + b)  c = (a  c) + (b  c)

(a - b)  c = (a  c) - (b  c)

Por ejemplo, al resolver la expresión (27 + 30)  3, se tendría:

(27+ 30)  3

= (27  3) + (30  3)

= 9 + 10

= 19

Si el dividendo y el divisor de una división (exacta o inexacta) se multiplican o divide por un mismo número natural, el cociente de la divi­sión no cambia.

Por ejemplo,

* 30  6 = 5 División indicada
* 10  2 = 5 Dividiendo entre 3 el dividendo y el divisor
* 60  12 = 5 Multiplicando por 2 el dividendo y el divisor

**Ejemplo:**

1. Mostrar con un ejemplo que la división entre números naturales no cumple con las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa y modulativa.

**Solución**

* Clausurativa: 21  N, 2  N pero 21  2  N
* Conmutativa: 15  3 = 5  N pero 3  15 N

Luego, 15  3  3  15

* Asociativa: 18  (6  3) = 18  2 = 9 pero (18  6)  3 = 3  3 = 1

Luego, 18  (6  3)  (18  6)  3

* Modulativa: 13  1 = 13 pero 1  13  N

1. Un granjero tiene 952 gallinas; cada gallina pone dos huevos diarios. ¿Cuántos huevos pondrán en 30 días? Si el granjero desea empacar los huevos en cajas de a 15 cada una, ¿cuántas cajas saldrán?

**Solución:**

Para determinar cuántos huevos pondrán las gallinas en un mes, se plantea y resuelve la expresión

2 X 952 X 30 = 57.120

Por otro lado, para saber cuántas cajas saldrán al empacar los 57.120 huevos en cajas de 15 huevos, se plantea y se resuelve la expresión 57.120  15 = 3.808.

Luego, las gallinas pondrán 57.120 huevos al mes y el granjero podrá empa­carlos en 3.808 cajas de 15 huevos cada una.

### Práctica lo aprendido

1. Completar la siguiente tabla.

Tabla 46: Partes del Proceso de División.

| Dividendo | Divisor | Cociente | Residuo |
| --- | --- | --- | --- |
| 75 |  | 5 |  |
|  | 3 |  | 1 |
|  | 4 | 8 |  |
| 28 |  |  | 0 |

1. Marcar si la división que es exacta.
2. 57  4
3. 2.237  3
4. 37.650  10
5. 9.356  57
6. 10.328  14
7. 79.361  5
8. 8.563  13
9. 4.325  15
10. 3.560  10
11. Encontrar el factor desconocido D. Luego, escribir cada multiplicación como dos divisiones dife­rentes.
12. 36 XD =72
13. D X 21 =1.323
14. 46 X D = 184
15. D X 75 = 375
16. 38 X D = 342
17. D X 7 = 315
18. 23 X D = 1.081
19. 9 X D = 504
20. Escribir el número 7 utilizando cinco cifras iguales y las operaciones que se necesiten.
21. Resolver cada división aplicando la propiedad distributiva. Luego, verificar los resultados.
22. (45 + 5)  5
23. (35 - 7)  7
24. (12 + 6 - 4)  2
25. (18 - 6 + 9)  3
26. (55 - 22 - 11)  11
27. (16 + 8 + 8)  8
28. (116 - 58 - 29)  29
29. (308 - 154 - 77)  77
30. (156 - 45 - 9)  3
31. (75 + 5 - 5)  5
32. (140 - 105 + 35)  35
33. (588 + 300 - 96)  12
34. Encontrar en cada división el menor número que hay que sumar al dividendo para que el cociente aumente en una unidad y sea una división exacta.
35. 124  13
36. 23  11
37. 98  10
38. 136  17
39. 60  8
40. 75  7
41. Se quiere colocar 150 fotos en un álbum. En cada página se pueden colocar ocho fotos. ¿Cuántas páginas se pueden llenar? ¿Cuántas fotos más se necesitarán para completar otra página?
42. 1200 personas esperan para ver una exposición de arte. Se permite el ingreso a 35 personas cada 20 minutos. Si la exposición está abierta durante ocho horas, ¿podrán entrar las 1.200 personas?
43. Estas son las distintas opciones que ofrecen parques de diversiones para sus clientes.

* Pasaporte Acuático:

Niño $30.000

Adulto $35.000

Válido para 8 atracciones.

* Pasaporte Mundo

Niño: $45.000

Adulto: $30.000

Válido para 5 atracciones

* Pasaporte Karts

Niño: $32.500

Adulto: $37.500

Válido para 5 atracciones

1. ¿En qué parque, el costo de cada atracción, para un ni­ño, es más económico?
2. Dos niños y un adulto tie­nen $250.000 de presu­puesto para divertirse en cualquiera de estos parques, ¿en cuál pueden comprar más pasaportes?
3. Una familia conformada por tres niños y dos adultos tiene un presupuesto de $400.000 para a uno de los parques. ¿Cuál es la mejor opción?
4. La familia López compra un apartamento de $45.000.000. Dan $10.000.000 de cuota inicial y el resto del dinero lo pagarán en 16 cuotas mensuales.
5. ¿Cuál será el valor de cada cuota?
6. Luego del pago de la cuota inicial, la construc­tora decide que el resto del dinero lo pagarán en 24 cuotas de $3.000.000 cada una, ¿cuál será el costo real del apartamento?
7. Para el pago de la cuota inicial, se ha acordado que la mitad del dinero se dará en efectivo, una cuarta parte del dinero lo entregará una Caja de compensación familiar y el resto del dinero se dará en dos cheques de igual valor. ¿Por cuánto dinero se debe girar cada cheque?
8. Un carpintero necesita cortar en cuatro partes una tabla de 30 cm de largo, de modo que cada una de ellas mida el doble de la otra, ¿cuánto debe medir cada pieza de la tabla?
9. En una biblioteca hay 108 libros acomodados en tres estantes. En la primera estantería está la mitad de los libros y en la segunda hay 20 libros más que en la tercera. ¿Cuántos libros hay en cada estantería?
10. Inventar una pregunta para cada problema y re­solver.
11. En una imprenta se hacen 1.500 copias de un texto. Si cada día se imprimen 100 copias...
12. Para llenar un tanque de agua se dispone de dos llaves. Por una salen 10 litros de agua cada minuto y por la otra 15 litros cada minuto. El tanque tiene una capacidad de 600 litros...
13. Completar el siguiente estado de cuenta de una tarjeta de crédito.

Tabla 47: Partes del estado de cuenta

| Número de Comprobante | Fecha | Referencia | Descripción | Cargos y Abonos | Saldo | No. De cuotas | Cuotas Pagas |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 00054 | Feb. 2/06 | 541867013 | Zapatos Toti | $136.000 |  | 4 | 3 |
| 00058 | Mar.08/06 | 54327115 | Restaurante | $84.000 |  | 6 | 5 |
| 00059 | Abril 7/06 | 54327117 | Shop-Ship | $300.000 |  | 10 | 9 |
| 00038 | Abril 27/06 | 34512312 | Avance | $1.020.000 |  | 12 | 10 |
| 00032 | Mayo 15/06 | 34514317 | Food-fast | $47.700 |  | 6 | 4 |

## SOLUCIÓN DE EXPRESIONES ARITMÉTICAS

Los signos de agrupación más utilizados en las expresiones arit­méticas son:

* El paréntesis ( )
* Los corchetes [ ]
* Las llaves { }

Una expresión aritmética es aquella en la que se combinan números natu­rales mediante diversas operaciones. Para resolver expresiones aritméti­cas se deben tener en cuenta los siguientes casos.

* Para resolver una expresión sin signos de agrupación, primero se deben resolver las multiplicaciones y las divisiones indicadas en su orden respectivo. Luego, se resuelven las sumas y restas correspondientes de izquierda a derecha. Por ejemplo,

9X5 18  3 – 6 X 5

= 45 + 6 - 30 Se resuelven las multiplicaciones y divisiones indicadas

= 21 Se resuelven las sumas y restas correspondientes.

* Para resolver una expresión con signos de agrupación, estos se deben eliminar de dentro hacia fuera. Para esto se resuelven las operaciones indicadas dentro de cada uno de ellos.

15 + [9  (11 X 2 - 19)]

= 15 + [9  (22 - 19)] Se resuelve el producto del paréntesis.

= 15 + [9  3] Se eliminan los paréntesis efectuando la resta correspondientes

= 15 + 3 Se eliminan los corchetes efectuando la división indicada.

= 18 Se efectúa la suma correspondiente.

**Ejemplo:**

1. Resolver las siguientes expresiones:
2. 8 X 5 + 54  6 - 10 X 3 + 121  11
3. 12 X 3  2 + 21  3 X 5 – 9 X 5  15
4. 100 - {65 - [16 X (12  3)]}
5. [(63  7 + 11) - (7 X 4 - 8)] + 19
6. 15 – 3 X 4 + 6 – 8  2 + 12 - 15  3

**Solución**

1. 8 X 5 + 54  6 - 10 X 3 + 121  11

= 40 + 9 - 30 + 11 Se resuelven las multiplicaciones y divisiones indicadas.  
= 30 Se resuelven las sumas y restas correspondientes.

1. 12 X 3  2 + 21  3 X 5- 9 X 5  15

= 36  2 + 7 X 5 - 45  15 Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.

= 18 + 35 - 3 Se resuelven las sumas y restas correspondientes.

= 50

1. 100 - {65 - [16 X (12  3)]}

= 100 — {65 — [16 X 4]} Se eliminan los paréntesis.

= 100 - {65 - 64} Se eliminan los corchetes.

= 100-1 Se eliminan las llaves.

= 99 Se efectúa la resta correspondiente.

1. [(63  7 + 11) - (7 X 4 - 8)] + 19

= [(9 + 11) — (28 — 8)] + 19 Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.

= [20 — 20] + 19 Se eliminan los paréntesis.

= 0 + 19 Se eliminan los corchetes.

= 19 Se efectúa la suma respectiva.

1. 15 – 3 X 4 + 6 - 8 2 + 12 – 15  3

= 15 – 12 + 6 – 4 + 12 – 5

= 12

1. Un extracto bancario registra los siguientes movimientos realizados durante el mes de enero:

Tabla 48: Extracto Bancario

| Fecha | Concepto | Valor |
| --- | --- | --- |
| Ene. 03/07 | Saldo anterior | 235.500 |
| Ene. 10/07 | Consignación nómina | 439.800 |
| Ene. 15/07 | Retiro cajero | 90.000 |
| Ene. 23/07 | Consignación | 55.000 |
| Ene. 25/07 | Retiro sucursal | 142.500 |
| Ene. 30/07 | Retiro cajero | 200.000 |

Plantear y resolver una expresión aritmética que indique el nuevo saldo del ahorrador.

**Solución:**

La expresión aritmética que indica el nuevo saldo del ahorrador, está dada por:

235.500 + 439.800 – 90.000 + 55.000 – 142.500 – 200.000

= 297.800

Luego, el nuevo saldo del ahorrador es de $297.800

1. Un estanque se va a llenar con el agua que surten dos llaves. La primera llave vierte 15 litros de agua por minuto y la segunda vierte 20 litros cada minuto. Si el estanque tiene una capacidad de 1.500 litros y además, un desagüe por el que salen 25 litros de agua por minu­to. Plantear y resolver una expresión aritmética que indique la can­tidad de horas que se necesitan para llenar el estanque.

**Solución:**

La expresión aritmética que indica la cantidad de horas que se necesitan para llenar el estanque, está dada por:

1.500  (15 + 20 - 25)

Al resolver la expresión aritmética, se tiene que,

1.500  (15 + 20 - 25)

= 1.500  10

= 150

Luego, la cantidad de horas que se necesitan para llenar el estanque es de 150 minutos, es decir, dos horas y media.

1. Esteban realiza las compras que se muestran en la tabla.

Tabla 49: Compras de Esteban

| Artículo | Cantidad | Precio por unidad |
| --- | --- | --- |
| Camiseta | 3 | 21.500 |
| Pantaloneta | 3 | 16.200 |
| Medias | 5 | 7.500 |
| Cachucha | 2 | 19.800 |

Plantear y resolver una expresión aritmética que indique cuánto debe pagar Esteban mensualmente, si paga con tarjeta de crédito y difiere el valor a tres cuotas.

**Solución**

La expresión aritmética que indica el dinero que debe pagar Esteban men­sualmente, está dada por:

[(3 X 21.500) + (3 X 16.200) + (5 X 7.500) + (2 X 19.800)]  3

Al resolver la expresión aritmética, se tiene que,

[(3 X 21.500) + (3 X 16.200) + (5 X 7.500) + (2 X 19.800)]  3

= [64.500 + 48.600 + 37.500 + 39.600]  3

= 190.200  3

= 63.400

Luego, Esteban debe pagar mensualmente cuotas de $63.400.

### Práctica lo aprendido

1. Marcar en cada caso la respuesta correcta.
2. 9 X 4 + 2

* 38
* 54

1. 9 – 3 X 3

* 18
* 0

1. 11 X 17 + 9

* 14
* 216

1. 20 + 10  5

* 6
* 22

1. 120  5 X 4

* 96
* 6

1. 86 – 9 X 8

* 14
* 616

1. 86 + 3 X 12

* 212
* 122

1. (53 – 17)  6

* 8
* 6

1. 74 – 18 X 3

* 168
* 20

1. Resolver:
2. 8 X 3 + 2
3. (35 - 7)  4
4. 18  9 + 4
5. 28  7 + 5
6. 14  7 + 2
7. 9  3 + 8 X 2
8. 3 X 4 + 5 X 7
9. 8 X 3 – 4 – 2
10. 12 X 4 – 6
11. 36  4 + 12 X 3
12. Escribir el número natural que representa cada letra.
13. A X 26  B = 156
14. 16 – A  5 = B
15. A + 86 X B = 354
16. A  12 X 3 + B = 51
17. Ubicar los signos +, -, X,  para que se cumpla la igualdad en cada caso.
18. 10\_ 5\_4\_3 = 5
19. 6\_3\_18\_9 = 20
20. 85 \_ 5 \_ 6 \_ 4 = 106
21. 15\_5\_8\_5 = 72
22. 42 \_ 6 \_ 6 \_ 15 = 21
23. 12\_ 3\_15\_3 = 31
24. Unir las expresiones que tienen el mismo resultado.

**Grupo 1:**

1. [(84 - 12)  4] – 11
2. 121  11 X 3
3. 12 X 36 – 75
4. 48  2 + 12 X 12
5. 5 X 12 + 50 X 2
6. 12 + 3 X 6 + 28

**Grupo 2:**

1. (9 + 5) X 4 + 2
2. (36 - 12) X 14  2
3. 15 X (18  9) + 3
4. 54  (14 - 8) – 2
5. 45 X (3 + 5) – 3
6. [(25 + 9) X 5] – 10
7. Ubicar signos de agrupación para que se cumpla la igualdad.
8. 8 + 12  2 X 5 = 70
9. 8 + 12  2 X 5 = 50
10. 16 – 3 X 5 + 4 = 69
11. 8 + 12  2 X 5 = 2
12. 8 + 12  2 X 5 = 38
13. 16 - 3 X 5 + 4 = 5
14. 40  8 + 2 X 7 = 28
15. 40  8 + 2 X 7 = 19
16. 25 X 5 + 15  5 = 100
17. 25 X 5 + 15  5 = 28
18. Escribir la expresión numérica que corresponda a cada frase. Luego, calcular el resultado.
19. A 120 se le resta 56 y a este resultado se le resta la suma de 23 y 17.
20. A 375 se le suma el doble del producto de 26 y 39.
21. Una pareja de esposos está calculando el presu­puesto del mes, sus salarios son $1.200.000 y $950.000, respectivamente. Si emplean la cuarta parte del dine­ro en servicios; $250.000 en mercado y cada uno gasta $300.000 en gastos personales, ¿cuánto dinero les queda para ahorrar?
22. Seis amigos planean unas vacaciones 8 días y 7 noches. ¿Cuál es la opción más económica?

* Opción 1:

Gran oportunidad Euro plan

(5 días-4 noches)

Acomodación:

Sencilla: US$ 2.900

Doble: US$ 2.700

Triple: US$ 2.530

US$1.300 por noche adicional

Desde US$ 2.530

* Opción 2:

Promoción

Viaje Centroamérica

Cabañas 6 personas

(4 días - 3 noches)

US $300 más por noche adicional

Desde US$ 2.530

* Opción 3:

Centroamérica de Sueño

(6 días - 5 noches)

Acomodación:

Sencilla: US$ 12.000

Doble: US$ 23.500

Triple: US$ 35.000

Adicional por noche US$ 15.000

Desde US$ 12.000

1. Si se desea estar 10 días en Europa, ¿qué es más aconsejable, tomar de nuevo el plan o pagar las 4 noches adicionales?
2. ¿Cuánto paga una familia en el Euro plan si se acomodan en dos habitaciones sencillas y una doble?
3. ¿Cuánto más paga una pareja en Centroamérica de sueño si se queda 3 días más de lo acordado?
4. Leer cada problema. Luego, elegir la operación que lo resuelve.
5. En el grupo de danzas del cole­gio hay 25 estudiantes y en el de música hay 16. Si hay siete estudiantes que pertenecen a los dos grupos, ¿cuántos estu­diantes participan en total en las dos actividades?
6. En una video tienda hay siete estantes con 25 películas de acción cada uno y seis estantes con 10 películas de terror cada uno. ¿Cuántas películas hay en los estantes?
7. En una biblioteca hay siete ca­jas con seis libros de español cada una. Además, hay 10 cajas y en cada una hay seis libros de matemáticas y 25 de ciencias. ¿Cuántos libros hay en las cajas?
8. Con las siguientes cuatro cifras: 4, 6, 8 y 2, for­mar dos números, uno de tres cifras y otro de una cifra, tal que el producto de estos sea el mayor posible.
9. ¿Cuál es el menor número, mayor que 300, que se puede obtener utilizando cinco veces el 6?
10. Con las siguientes siete cifras: 7, 6, 3, 2, 1, 9 y 4 formar dos números uno de tres cifras y otro de cuatro cifras de tal manera que el producto de estos sea el menor posible.
11. Usar los siguientes datos para completar el enun­ciado.
12. 2.500
13. 4.000.000
14. 1.500
15. 3.000
16. 10.000.000

Un vendedor vendió cierto número de trajes por ( ) a ( ) cada uno y por cada ( ) trajes que vendió le regala­ron uno. ¿Cuántos trajes vendió? ¿Cuántos tra­jes le regalaron?

## POTENCIACIÓN EN LOS NATURALES

La potenciación es una operación que permite escribir, en forma abre­viada, productos cuyos factores son todos iguales. Así,

Si a, b, n  N, entonces, el producto de factores:

Ecuación 1: Producto de a, n veces



**Descripción Ecuación:** a x a x a x a x... x a (encerrado en una llave en la base)= b, debajo de la llave dice n veces.

Se puede expresar como



Y se lee "a a la n es igual a b" o "b es la n-ésima potencia de a"

**Elementos de la potencia de números naturales**

En la expresión a a la n = b, a recibe el nombre de base y es el factor que se repite; n recibe el nombre de exponente y es el número de veces que se repite la base; y b recibe el nombre de potencia y es el resultado de mul­tiplicar la base tantas veces como lo indique el exponente.

Por ejemplo, la expresión 4 X 4 X 4 = 64 se puede escribir como:



Donde 4 es la base, 3 el exponente y 64 la potencia.

Para hallar el valor de una potencia, se debe multiplicar la base tantas veces como lo indique el exponente.

Por ejemplo, 2 a la 5 = 32 pues 2 X 2 X 2 X 2 X 2= 32

Si un número está elevado al exponente 2, se dice que el número está "ele­vado al cuadrado"; y si está elevado al exponente 3, se dice que está "ele­vado al cubo".

**Ejemplo:**

Completar la siguiente tabla teniendo en cuenta la definición de poten­ciación en los números naturales.

Tabla 50: Partes de una Potenciación.

| Potencia Indicada | Producto | Base | Exponente | Potencia | Lectura |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 7 al cubo |
|  | 2 X 2 X 2 X 2 X 2 X 2 |  |  |  |  |
|  |  | 10 | 4 |  |  |

**Solución**

Tabla 51: Solución de las partes de un proceso de potenciación.

| Potencia Indicada | Producto | Base | Exponente | Potencia | Lectura |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 X 5 | 5 | 2 | 25 | 5 al cuadrado es 25 |
|  | 7 X 7 X 7 | 7 | 3 | 343 | 7 al cubo es 343 |
|  | 2 X 2 X 2 X 2 X 2 X 2 | 2 | 6 | 64 | 2 a la seis es 64 |
|  | 10 X 10 X 10 X 10 | 10 | 4 | 10000 | 10 a la 4 es 10000 |

### CUADRADOS Y CUBOS PERFECTOS

Un número natural es cuadrado perfecto cuando es el resultado de ele­var otro número natural al cuadrado. Por ejemplo, 49 es un cuadrado per­fecto porque es el resultado de elevar 7 al cuadrado. Esto es, 7 a la 2 = 49

Un cuadrado perfecto se puede representar como el área de un cuadrado cuyo lado mide el número natural que se eleva. Por ejemplo, 36 es un cuadrado perfecto, el cual representa el área de un cuadrado cuyo lado mide 6 uni­dades.

La siguiente tabla muestra los primeros diez cuadrados perfectos, los cua­les resultan de elevar al cuadrado los diez primeros números naturales.

Tabla 52: Cuadrados Perfectos.

| Número | Cuadrado Perfecto |
| --- | --- |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| 6 | 36 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| 9 | 81 |
| 10 | 100 |

Un número natural es cubo perfecto cuando es el resultado de elevar otro número natural al cubo. Por ejemplo, 125 es un cubo perfecto por­que es el resultado de elevar 5 al cubo. Esto es, 5 a la 3 = 125

Un cubo perfecto se puede representar como el volu­men de un cubo cuya arista mide el número natural que se eleva. Por ejemplo, 64 es un cubo perfecto, el cual representa el volumen de un cubo cuya arista mide 4 unidades.

La siguiente tabla muestra los primeros diez cubos perfectos, los cuales resultan de elevar al cubo los diez primeros números naturales.

Tabla 53: Cubos Perfectos.

| Número | Cubo perfecto |
| --- | --- |
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |
| 3 | 27 |
| 4 | 64 |
| 5 | 125 |
| 6 | 216 |
| 7 | 343 |
| 8 | 512 |
| 9 | 729 |
| 10 | 1000 |

**Ejemplo:**

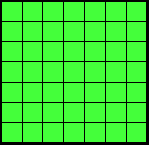
Representar gráficamente las siguientes potencias.

1. 7 a la 2
2. 3 a la 3

**Solución**

1. 7 a la 2

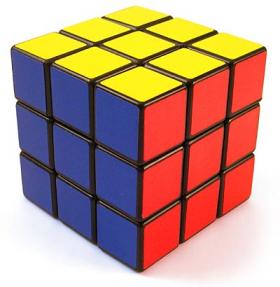
Imagen 29: Cuadrado de 7



**Descripción Imagen:** Cuadrado de color verde dividido en 7 filas y en 7 columnas.

1. 3 a la 3

Imagen 30: Cubo de 3



**Descripción Imagen:** Imagen de 3 caras de un cubo de colores amarillo, azul y rojo, cada cara dividida en 3 filas y 3 columnas.

### POTENCIAS DE 10

Las potencias de 10 son utili­zadas comúnmente para repre­sentar cantidades demasiado grandes o demasiado pequeñas. Este tipo de notación se deno­mina notación científica.

Las potencias de 10 son potencias que resultan de elevar el número 10 a cualquier número natural. Por ejemplo, 1000 es una potencia de 10 pues 10 a la 3 = 1000.

El resultado de una potencia de 10 es un 1 seguido de tantos ceros como indi­que su exponente. Así,

* 10 a la 1 = 10
* 10 a la 2 = 100
* 10 a la 3 = 1.000

**Ejemplo:**

Expresar los siguientes números utilizando potencias de 10:

1. 100.000
2. 189.000
3. 1.300.000

**Solución**

1. 100.000 = 10 a la 5
2. 189.000 = 189 X 1.000 = 189 X 10 a la 3
3. 1.300.000 = 13 X 100.000 = 13 X 10 a la 5

### PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

La potenciación en el conjunto de los números naturales, cumple con las siguientes propiedades:

1. **Producto de potencias de igual base.** Para multiplicar dos o más poten­cias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes. Esto es,

****

Por ejemplo, 3 a la 5 X 3 a la 2 = 3 a la 7

1. **Cociente de potencias de igual base.** Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes. Esto es:

****

Por ejemplo, 

1. **Potencia de una potencia.** Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes. Esto es,

****

Por ejemplo, (2 a la 3) a la 5 = 2 a la (3 X 5) = 2 a la 15

1. **Potencia de un producto.** La potencia de un producto es el producto de las potencias de cada uno de sus factores. Esto es,

****

Por ejemplo, (5 X 2) a la 6 = 5 a la 6 X 2 a la 6

1. **Potencia de un cociente.** La potencia de un cociente es el cociente de las potencias de cada uno de sus factores. Esto es,

**, **

Por ejemplo, 

### EL CERO Y EL UNO EN LA POTENCIACIÓN

Cuando la base o el exponente de una potencia están relacionados con los números 0 y 1, se determinan las siguientes propiedades:

1. Todo número natural elevado al exponente cero, da como resultado uno. Así,

****

1. Cero elevado a cualquier número natural, da como resultado cero. Así,

****

1. Todo número natural elevado al exponente uno, da como resultado el mismo número. Así,

****

1. Uno elevado a cualquier número natural, da como resultado uno. Así,

****

1. Cero elevado al exponente cero, no está definido en ningún sistema numérico.

**Ejemplo:**

Utilizar las propiedades de la potenciación para hallar el resultado de las siguientes potencias.

1. ****
2. ****
3. ****
4. ****

**Solución:**

1. 2 a la 3 por 2 a la 4

= 2 a la 3 + 4 Producto de potencias de igual base.

= 128

1. (3 a la 5 por 3 a la 4)/ (3 a la 7)

= (3 a la 9) / (3 a la 7) Producto de potencias de igual base.

= 3 a la 2 Cociente de potencias de igual base.

= 9

1. (5 a la 3 por 5 a la 6) / (( 5 a la 2) a la 4)

= (5 a la 3 por 5 a la 6) / (5 a la 8) Potencia de una potencia

= (5 a la 9) / (5 a la 8) Producto de potencias de igual base.

= 5 a la 1 Cociente de potencias de igual base.

= 5

1. (7 a la 6 por 7 a la 2) / (7 a la 4 por 7 a la 4)

= (7 a la 8) / (7 a la 8) Producto de potencias de igual base.

= 7 a la 0 Cociente de potencias de igual base.

= 1 Natural elevado al exponente cero.

### EXPRESIONES CON POTENCIAS

Para solucionar una expresión que contenga potencias indicadas, se debe tener en cuenta que primero se deben resolver dichas potencias para, luego, resolver las multiplicaciones y divisiones correspondientes en su orden respectivo. Por último, se resuelven las sumas y restas presentes en la expresión.

Si la expresión presenta signos de agrupación, estos se deben eliminar de dentro hacia fuera, resolviendo las operaciones indicadas en cada uno de ellos.

**Ejemplo:**

1. Resolver las siguientes expresiones.
2. 4 X  -   9
3.  X 9 +   2 - 3 X  X 
4.  - {80 - [ + ( X 2)]}

**Solución:**

1. 4 por 5 a la 2 – 3 a la 4 dividido 9

= 4 X 25 – 81  9 Se resuelven las potencias.

= 100 – 9 Se resuelven multiplicaciones y divisiones.

= 91 Se resuelve la resta correspondiente.

1. 2 a la 3 por 9 más 4 a la 3 dividido 2 menos 3 por 2 a la 5 por 13 a la cero

= 8 X 9 + 64  2 – 3 X 32 + 1 Se resuelven potencias.

= 72 + 32 \_ 96 + 1 Se resuelven multiplicaciones y divisiones.

= 9 Se resuelven sumas y restas.

1. 10 a la 2 – {80 – [3 a la 3 + ( 5 a la 2 por 2)]}

= 100 – {80 – [27 + (25 X 2)]} Se resuelven potencias.

= 100 – {80 – [27 + 50]} Se eliminan paréntesis.

= 100 – {80 – 77} Se eliminan corchetes.

= 100 – 3 Se eliminan llaves.

= 97 Se efectúa la resta indicada.

1. Una bacteria es un organismo unicelular y microscópico que se reproduce por división celular sencilla. Muchas enfermedades son causadas por bacterias. Por ejemplo, la bacteria Yersinia pestis es la causante de la peste. Esta rara bacteria azotó a Europa durante el siglo XIV y dejó millones de muertos por todo el continente.

Si se reproduce triplicándose cada 20 minutos, ¿cuántas bacterias Yersinia pestis habrá después de transcurridas dos horas?

**Solución**:

No es tan difícil como se piensa...

El tiempo en que se reproduce la bacteria es de 20 minutos. Es decir, se repro­duce seis veces en el transcurso de las dos horas. Debido a que la bacteria se | triplica, el número de bacterias Yersinia pestis que habrá después de este tiempo, está dado por una potencia de base 3.

Así, 3 a la 6 = 729.

Luego, habrá 729 bacterias Yersinia pestis después de transcurridas dos horas.

### Práctica lo aprendido

1. Escribir cada potencia como un producto
2. 7 a la 2
3. 3 a la 4
4. 9 a la 3
5. 6 a la 4
6. 2 a la 7
7. 4 a la 3
8. 5 a la 5
9. 7 a la 4
10. 5 a la 2
11. 8 a la 3
12. Expresar como potencia cada producto.
13. 2 X 2 X 2 X 2
14. 3 X 3 X 3
15. 7 X 7 X 7 X 7 X 7
16. 5 X 5 X 5 X 5 X 5 X 5 X 5
17. 9 X 9 X 9 X 9
18. 12 X 12 X 12 X 12 X 12
19. Completar la tabla.

Tabla 54: Partes de una potenciación.

| Producto | Base | Exponente | Potencia | Se lee |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 X 3 X 3 |  |  |  |  |
|  | 4 |  | 64 |  |
|  | 3 | 8 |  |  |
| 2 X 2 X 2 X 2 X 2 |  |  |  |  |
|  | 6 |  | 216 |  |
|  |  |  |  | “5 al cuadrado es 25” |

1. Relacionar las tres columnas.

**Columna 1:**

1. 5 a la 2
2. 2 X 2 X 2 X 2
3. 3 a la 0
4. 3 X 3
5. 7
6. 9 X 9

**Columna 2:**

1. 1
2. 7 a la 1
3. 5 X 5
4. 9 a la 2
5. 3 a la 2
6. 2 a la 4

**Columna 3:**

1. 25
2. 16
3. 81
4. 7
5. 1
6. 9
7. ¿Cuántas baldosas se necesitan para cubrir un sector cuadrado de una pared cuyos lados miden 90 cm?
8. Indicar mediante una poten­cia, ¿cuántos cubos hay en el piso?

Imagen 31: Cuadrado de 5



**Descripción Imagen:** Cuadrado de color verde dividido en 5 filas y en 5 columnas.

1. Indicar mediante una potencia la cantidad de cubos que hay.

Imagen 32: Cubo de 5

3 caras de un cubo divididas  partes iguales cada una.


**Descripción Imagen:** Imagen de 3 caras de un cubo de colores rojo, amarillo, verde. Cada una dividido en 5 filas y 5 columnas.

1. Escribir en forma abreviada y calcular.
2. Tres elevado al cubo
3. Seis elevado al cuadrado
4. Dos elevado al cubo
5. Cuatro elevado al cuadrado
6. Los griegos representaban un núme­ro cuadrado perfecto, partiendo de un punto y aña­diendo al borde la cantidad de puntos necesarios hacía la izquierda y hacía arriba, para formar un cuadrado. Los griegos lla­maron a este borde gnomo. Completar la secuencia hasta los primeros cinco números cuadrados.
7. Investigar una forma de encontrar la suma de los primeros números cuadrados perfectos.
8. Expresar los siguientes productos de manera que uno de los factores sea una potencia de 10. Luego, resolverlo.
9. 92 X 3.000
10. 4 X 12.000
11. 7 X 82.000
12. 36 X 5.000
13. 11 X 200
14. 81 X 1.000
15. 1.500 X 30
16. 500 X 15
17. 43 X 12.000
18. 28 X 4.000
19. 38 X 250.000
20. 73 X 9.000
21. Completar la siguiente tabla.

Tabla 55: Distancias a la tierra

| De la Tierra | Distancias en Km | Distancias utilizando potencias de 10 |
| --- | --- | --- |
| La Luna |  | 3.844 X 10 a la 2 km |
| Sol |  | 1.496 X 10 a la 5km |
| Marte |  | 7.824 X 10 a la 4km |
| Plutón |  | 57.504 X 10 a la 5 km |
| Mercurio |  | 916 X 10 a la 5 km |

1. Expresar como una sola potencia.
2. 2 a la 3 X 2
3. 5 a la 5 X (5 a la 2) a la 0  5 a la 3
4. 3 a la 2 X 3 a la 6 X 3 a la 3  3 a la 4
5. (4 a la 2) a la 3 X 4 a la 4  2 a la 4
6. 4 a la 2 X 4 a la 3 X 4 a la 2  2 a la 2
7. 3 a la 4  9 a la 2
8. Escribir >, < o = según corresponda.
9. 7 a la 2 y 2 a la 7
10. 3 a la 2 X 3 a la 5 – 3 a la 3 y 3 a la 4
11. [(5 a la 3) a la 1] a la 2 y [(5 a la 0 ) a la 2] a la 3
12. 6 a la 3 X (6 a la 3) a la 2 y 3 a la 6 X [3 a la 6] a la 2
13. 4 a la 3  4 a la 2 y 1 a la 0
14. (10 a la 5) a la 2  10 a la 0 y (10 a la 2) a la 5
15. Verificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas, teniendo en cuenta que a = 2, b = 3, c = 4.
16. (a X b X c) a la 2 = a a la 2 X b a la 2 X c a la 2
17. a a la b  b a la a
18. (b + c) a la a  (b a la a + c a la a)
19. a a la 0  b a la 0
20. (c - a) a la b  (c a la b – a a la b)
21. (a a la b) a la c  a a la (b a la c)
22. ¿Cuáles son los dígitos de las unidades, decenas y centenas del número 5 a la 12.345?
23. Escribir si la expresión es correcta o si no lo es.
24. 9 a la 2 X 4 a la 4 – 4 a la 1 = 9 a la 2 X 4 a la 3
25. a a la 0 = a
26. 2 a la 10  2 a la 4 X 2 a la 3  (2 a la 5)  7
27. (2 a la 2) a la 3  (2 a la 3) a la 2
28. 3 a la 12  3 a la 8 X 3 a la 4 = 3 a la 0
29. (7 a la 2) a la 3 = (2 a la 7) a la 3
30. (5 a la 2 X 5 a la 5) a la 2 = (5 a la 2) a la 7
31. 8 a la 3 X 8 a la 2 8 = 8 a la 2
32. Utilizar las propiedades de la potenciación para simplificar cada expresión.
33. [(8 a la 2)a la 4 X 3 a la 6 X 8 a la 4 X (3 a la 2 X 9) a la 4] / [9 X (3 a la 4) a la 5 X 8 a la 4]
34. [3 a la 5 X 4 a la 4 X (3 a la 2)a la 4 X 4] / [(2 a la 2) a la 2 X 3 a la 5 X 4 a la 2]
35. Resolver las siguientes expresiones.
36. 8 a la 2 X 5 – 7 a la 2  7
37. 54  6 X 8  2
38. 100 – 5 a la 2 – 7 a la 0 X 8  2 a la 2
39. 20 + 100  10 a la 2 + 2 a la 8  2 a la 5
40. 13 X 10 a la 2 - 10 + 5 a la 2 X 5 a la 3  5 a la 4
41. Escribir los paréntesis en el lugar correspondiente para que se cumpla la igualdad.
42. 3 a la 3 – 5 a la 2 X 5 – 5 a la 0 + 17  3 = 14
43. 5 a la 2 X 3 a la 2  5 – 5 a la 0 + 17  3 = 9

## RADICACIÓN EN LOS NATURALES

La radicación es una operación inversa a la potenciación. Permite hallar la base cuando se conocen el exponente y la potencia. Así,

Si a, b, n  N y n > 1, entonces:

Ecuación 2: Radicación.



**Descripción Ecuación:** Símbolo chulo alargado a la derecha desde la punta superior, en el espacio del chulo hay una n, y debajo de la línea alargado hay una b igual a.

Si y sólo si:



En la expresión , n recibe el nombre de índice, b de cantidad subradical o radicando y a de raíz n-ésima.

Por ejemplo, la expresión 5 a la 3 = 125 se puede escribir como raíz tercera de 125 = 5, donde 3 es el índice de la raíz, 125 la cantidad subradical y 5 la raíz.

Para extraer la raíz exacta de un número natural, se busca un número tal que elevado al índice de la raíz dé como resultado la cantidad subradical o radi­cando.

Por ejemplo, Raíz quinta de 32 = 2, pues 2 a la 5 = 32

Las raíces cuyo índice es 2 se denominan raíces cuadradas. A diferencia de los demás casos, en este tipo de raíces no se escribe el índice.

Por ejemplo, raíz de 4, raíz de 25 y raíz de100 son raíces cuadradas.

Las raíces cuyo índice es 3 se denominan raíces cúbicas. Por ejemplo, raíz cúbica de 27, raíz cúbica de 64 y raíz cúbica de 216 son raíces cúbicas.

En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos de raíces.

Tabla 56: Partes de la potenciación.

| Potencia | Raíz Indicada | Índice | Cantidad Subradical | Raíz | Lectura |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9 a la 2 = 81 | Raíz (81) = 9 | 2 | 81 | 9 | La raíz cuadrada de 81 es 9 |
| 4 a la 3 = 64 | Raíz Cúbica (64) = 4 | 3 | 64 | 4 | La raíz cúbica de 64 es 4 |
| 3 a la 5 = 243 | Raíz Quinta (243) = 3 | 5 | 243 | 3 | La raíz quinta de 243 es 3 |
| 2 a la 7 = 128 | Raíz Séptima (128) = 2 | 7 | 128 | 2 | La raíz séptima de 128 es 2 |

### PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

La radicación en el conjunto de los números naturales, cumple con las siguientes propiedades:

1. **Raíz n-ésima de un producto.** La raíz n-ésima de un producto es igual  
   al producto de las raíces n-ésimas de cada uno de los factores. Esto es,

****

1. **Raíz n-ésima de un cociente.** La raíz n-ésima de un cociente es igual  
   al cociente de las raíces n-ésimas de cada uno de los factores. Esto es,

****

### EL CERO Y EL UNO EN LA RADICACIÓN

Cuando la cantidad subradical de una raíz indicada está relacionada con los números 0 y 1, se determinan las siguientes propiedades:

1. La raíz n-ésima de 1, da como resultado 1. Así,



1. La raíz n-ésima de 0, da como resultado 0. Así,



**Ejemplo:**

1. Hallar la medida del lado de un terreno con área igual a 169 metros cuadrados.

**Solución:**

La expresión que determina la medida del lado, está dada por



1. Utilizar las propiedades de la radicación para hallar el resultado de las siguientes raíces.
2. 
3. 

**Solución**

1. Raíz cúbica (27 X 1.000)

= raíz cúbica (27) X raíz cúbica (1.000) Raíz n-ésima de un producto.

= 3 X 10

= 30

1. Raíz cuarta (256 dividido 16)

= Raíz cuarta (256) dividido Raíz cuarta (16) Raíz n-ésima de un cociente.

= 4 dividido 2

= 2

### EXPRESIONES CON RAÍCES

Para resolver una expresión en la que se combinan las diversas opera­ciones vistas, se debe tener en cuenta que primero deben resolverse las potencias y raíces indicadas, luego, las multiplicaciones y divisiones en su orden respectivo, y, por último, las sumas y restas correspondientes. Si el polinomio presenta signos de agrupación, estos se deben eliminar de dentro hacia fuera resolviendo las operaciones indicadas dentro de cada uno de ellos.

**Ejemplo:**

Resolver las siguientes expresiones.

1. 
2. 

**Solución**

1. = 7 X 4 + 32  2 - 5 X 8 + 1 Se resuelven potencias y raíces.

= 28 + 16 - 40 + 1 Se resuelven multiplicaciones y divisiones.

= 5 Se resuelven sumas y restas.

1. = 4 + {10 - [5 X (9 - 9)]} Se resuelven potencias y raíces.

= 4 + {10 - [5 X 0]} Se eliminan paréntesis.

= 4 + {10 - 0} Se eliminan corchetes y llaves.

= 4

### Práctica lo aprendido

1. Calcular cada potencia y escribirla en forma de raíz
2. 8 a la 2
3. 3 a la 6
4. 5 a la 3
5. 9 a la 4
6. 2 a la 8
7. 10 a la 2
8. 12 a la 3
9. 4 a la 4
10. Completar la siguiente tabla.

Tabla 57: Partes de la Radicación.

| Índice | Radicando | Notación | Raíz |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 | 16 | Raíz(16) | 4 |
| 3 |  |  | 3 |
| ? |  | Raíz(49) |  |
| ? |  |  |  |
| ? |  |  |  |
| ? |  |  |  |

1. Subrayar las raíces exactas y encerrar las que no lo son. Justificar la respuesta.
2. Raíz(5)
3. Raíz cúbica(1.000)
4. Raíz (30)
5. Raíz(25)
6. Raíz cúbica (81)
7. Raíz (1)
8. Raíz cúbica (9)
9. Raíz(10000)
10. Raíz cúbica (49)
11. Raíz (0)
12. Raíz cuarta (32)
13. Encontrar el valor de cada raíz. Jus­tificar la respuesta con la potenciación.
14. Raíz cúbica (125)
15. Raíz (36)
16. Raíz cúbica (729)
17. Raíz quinta(5 a la 3 X 5 a la 2)
18. Raíz séptima (128)
19. Raíz novena [(3 a la 2 X 3) a la 3]
20. En las siguientes igualdades se borra­ron exponentes, símbolos radicales e índices. Escribir­los para que se cumpla la igualdad.
21. 576 = 24
22. 19 = 6.859
23. 169 = 13
24. 256 = 4
25. 32 = 2
26. 5 = 125
27. 12 = 1.728
28. 56 = 1
29. 36 = 6
30. Calcular las siguientes raíces aplicando las propiedades de la radicación.
31. Raíz (4 X 25)
32. Raíz (64 X 81 X 100)
33. Raíz (81  9)
34. Raíz cúbica (64  8)
35. Raíz quinta (1 X 100.000)
36. Raíz (36  9)
37. Raíz cuarta ( 16 X 81)
38. Raíz ( 2 a la 2 X 3 a la 2 X 25)
39. Raíz cubica (27 X 125)
40. Raíz cuarta (10 a la 3  1.000)
41. Raíz (49  49)
42. Raíz cuarta (0  16)
43. Calcular el resultado de cada expresión.
44. 3 a la 2  3 a la 2 - 2  raíz(4) + 4 a la 2
45. 4 a la 2 + 4 a la 3 – Raíz( 16) 5 a la 0
46. (Raíz(25) + 5) a la 2  5
47. Raíz(36) X 2 - 2 - 3 X Raíz(4)
48. 3 a la 2 + Raíz(81) X 3 a la 1 + 3 a la 4  9
49. Calcular las siguientes raíces.
50. Raíz(Raíz(81))
51. Raíz(Raíz Cúbica (1.000.000))
52. Raíz(Raíz(256))
53. Raíz(Raíz cuarta (8 a la 2))
54. Raíz(Raíz(625))
55. Raíz Cúbica(Raíz(1.000.000))

## LOGARITMACIÓN EN LOS NATURALES

Al igual que la radicación, la logaritmación es una operación inversa a la potenciación. Esta operación permite hallar el exponente cuando se conocen la base y la potencia. Así,

Si a, b, n  N, y a  1 entonces,

Ecuación 3: Logaritmo



Descripción ecuación: Log subíndice (a) b = n

Si y sólo si



Por ejemplo, 3 a la 4 = 81 se puede expresar como Log base 3 de 81 = 4.

Los logaritmos cuya base es 10 se denominan logaritmos decimales. A diferencia de los demás logaritmos, en este tipo de logaritmos no se escri­be la base. Por ejemplo, Log 100 y Log 1.000 son logaritmos decimales.

La palabra Logaritmo proviene de las palabras griegas logas que significa relación y arithmos que significa número. Fue introducida por primera vez en 1614 por el matemático escocés John Napier, quien también introdujo el punto decimal para separar las cifras decimales de las enteras.

**Ejemplo:**

Completar la siguiente tabla teniendo en cuenta la relación existente entre potenciación, radicación y logaritmación de números naturales.

Tabla 58: Relación entre otras operaciones.

| Base | Exponente | Potencia | Potenciación | Raíz | Logaritmo |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 6 | 64 |  |  |  |
|  |  |  | 3 a la 5 = 243 |  |  |
|  |  |  |  | Raíz cuarta (625) = 5 |  |
|  |  |  |  |  | Log 1000 = 3 |

**Solución**

Tabla 59: Solución de la relación.

| Base | Exponente | Potencia | Potenciación | Raíz | Logaritmo |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 6 | 64 | 2 a la 6 = 64 | Raíz Sexta(64) = 2 | Log base2 de 64 = 6 |
| 3 | 5 | 243 | 3 a la 5 = 243 | Raíz Quinta (243) = 3 | Log base 3 de 243 = 5 |
| 5 | 4 | 625 | 5 a la 4 = 625 | Raíz Cuarta (625) = 5 | Log base 5 de 625 = 4 |
| 10 | 3 | 1000 | 10 a la 3 = 1000 | Raíz cúbica(1.000) = 10 | Log 1.000 = 3 |

### PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

La logaritmación en el conjunto de los números naturales, cumple con las siguientes propiedades.

1. **Logaritmo de un producto.** El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de cada uno de los factores. Esto es,



1. **Logaritmo de un cociente.** El logaritmo de un cociente es la diferen­cia de los logaritmos del dividendo y el divisor. Esto es,



1. **Logaritmo de una potencia.** El logaritmo de una potencia es el pro­ducto del exponente por el logaritmo de la base. Esto es,



### EL CERO Y EL UNO EN LA LOGARITMACIÓN

Cuando los diferentes términos de un logaritmo están relacionados con los números 0 y 1, se determinan las siguientes propiedades:

1. El logaritmo de 1 en cualquier base, es 0. Así,



1. El logaritmo en base x de x, es 1. Así,



1. El logaritmo de O en cualquier base, no está definido en ningún siste­ma numérico.

**Ejemplos:**

1. Utilizar las propiedades de la logaritmación para hallar el resultado de las siguientes expresiones.
2. Log base 2 (3 a la 2 X 8) + Log base 5 (125  25)
3. Log base 3 (243 a la 2) + Log base 6 (216 a la 7)

**Solución:**

1. Log base 2 (3 a la 2 X 8) + Log base 5 (125  25)

= Log base 2 (3 a la 2) + Log base 2 (8) + Log base 5 (125) — Log base 5 (25) Log de un producto y de un cociente.

= 5 + 3 + 3 – 2 Se efectúan los logaritmos.

= 9 Se efectúan las sumas y restas.

1. Log base 3 (243 a la 2) + Log base 6 (216 a la 7)

= (2 X Log base 3 (243)) + (7 X Log base 6 (216)) Logaritmo de una potencia.

= (2 X 5) + (7 X 3) Se efectúan los logaritmos.

= 10 + 21 Se efectúan las sumas y restas.

= 31

1. Una bacteria se reproduce duplicándose cada hora. ¿Cuántas horas habrán transcurrido en el momento que hay exactamente 4096 bac­terias?

**Solución**

Debido a que la bacteria se reproduce duplicándose, el número de horas que habrán transcurrido en el momento que hay exactamente 4096 bacterias, está determinado por un logaritmo de base 2. Así,

Log base 2 (4096) = 12 pues 2 a la 12 = 4096

Luego, habrán transcurrido 12 horas en el momento que hay exactamente 4096 bacterias.

### Práctica lo aprendido

1. Escribir el número que corresponde a x. Luego, escribir cada expresión como un logaritmo.
2. 2 a la x = 8
3. 3 a la x = 81
4. 5 a la x = 625
5. 10 a la x = 1.000
6. 6 a la x = 216
7. 2 a la x = 64
8. 9 a la x = 729
9. 11 a la x = 1.331
10. 7 a la x = 343
11. 4 a la x = 1.024
12. 15 a la x = 225
13. 10 a la x = 10.000
14. Completar la siguiente tabla.

Tabla 60: Ejercicio de partes del logaritmo

| Logaritmación | Base | Número | Logaritmo | Se lee |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Log base 3 (27) |  | 27 |  |  |
|  | 4 |  | 3 |  |
|  | 8 | 64 |  |  |
| Log base 5(125) = 3 |  |  |  |  |

1. Encontrar x, y según corresponda y justificar como potencia.
2. Log base 2 8 = 3
3. Log 100 = x
4. Log base 5 (x) = 4
5. Log base 3 (x) = y
6. Log base 6 (x) = y
7. Escribir >, < o = según corresponda.
8. Log base 6 (36) y 6 a la 2
9. Raíz(81) y Log base 9 (81)
10. (7 a la 0) a la 3 y Log base 6 (6)
11. Log 100 y 10 a la 3
12. Raíz cuarta (27 X 3) y 9 a la 2
13. Log 10 y 10 a la 0
14. Log base 5 (25 X 5) y Log base 5 (25  5)
15. Log base 8 (512) – Log base 8 (64) y (8 a la 0) a la 5
16. Unir las expresiones correspondien­tes en cada columna.

**Potenciación**

1. 5 a la 3
2. 10 a la 4
3. 8 a la 3
4. 9 a la 4
5. 11 a la 2
6. 3 a la 7

**Radicación**

1. Raíz cuarta(6.561)
2. Raíz(121)
3. Raíz cúbica (125)
4. Raíz séptima( (2.187)
5. Raíz cuarta (10.000)
6. Raíz cubica (512)

**Logaritmación**

1. Log (10 a la 4)
2. Log base 11 (121)
3. Log base 8 (512)
4. Log base 3 (2.187)
5. Log base 9 (9 a ala 4)
6. Log base 5 (125)
7. Calcular cada logaritmo aplicando las propiedades.
8. Log base 5 (125  25)
9. Log base 3 (9  3)
10. Log base 11 (1331  121)
11. Log base 7 (49 a la 2)
12. Log ((10 a la 6) a la 2)
13. Log 10000  Log 100
14. Log 100  Log 10

# TEMA 4: TEORÍA DE NÚMEROS

Los cometas son cuerpos celestes formados por un núcleo de hielo y roca rodeado a su vez por una atmósfera nebulosa llamada cabellera o cola.

A medida que un cometa se aproxima al Sol, la alta temperatura solar provoca la evaporación del hielo, haciendo que brille en gran manera. La visibilidad de los cometas depende de la longi­tud de su cola y de su cercanía al Sol y a la Tierra.

Ciertos cometas se acercan a un planeta en determinados perío­dos de tiempo. Un primer cometa se acerca cada 12 años, un segundo cometa cada 24 años y un tercer cometa, cada 60 años. Si la última vez que se aproximaron fue en 1.889, ¿al cabo de cuán­tos años se volverán a encontrar? En ese período de tiempo, ¿cuántas veces habrá pasado cada cometa por dicho planeta?

## MÚLTIPLOS

El conjunto de múltiplos de un número a, se simboliza , y resulta de multiplicar dicho número por todos y cada uno de los números natura­les, incluyendo el 0.

Por ejemplo, el conjunto de todos los múltiplos del número 7 se simboliza , y se determina de la siguiente manera:

 = {0, 7, 14, 21, 28, 35...} Pues:

* 7 X 0 = 0
* 7 X 1 = 7
* 7 X 2 = 14
* 7 X 3 = 21...

El conjunto de múltiplos de un número a cumple las siguientes propie­dades:

1. El número cero siempre pertenece al conjunto, pues todo número mul­tiplicado por cero, da como resultado 0, es decir, a X 0 = 0.

Por ejemplo, 0 es múltiplo de 5 porque 5 X 0 = 0.

1. El número a siempre pertenece al conjunto , pues todo número multiplicado por uno, da como resultado el mismo número, es decir,

a X 1 = 1.

Por ejemplo, 7 es múltiplo de 7 porque 7 X 1 = 7.

1. El conjunto de los múltiplos de cualquier número natural es infinito ya que el conjunto de números naturales es infinito.

Ejemplo

1. Hallar los primeros ocho múltiplos de cada uno de los siguientes números:
2. 5
3. 12

Solución

1. Se multiplica 5 por cada uno de los primeros números naturales (incluyen­do el 0).

Así,

5 X 0 = 0

5 X 1 = 5

5 X 2 = 10

5 X 3 = 15

5 X 4 = 20

5 X 5 = 25

5 X 6 = 30

5 X 7 = 35

Luego,  = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35...}

1. Se multiplica 12 por cada uno de los primeros números naturales.

Así,  
12 X 0 = 0

12 X 1 = 12

12 X 2 = 24

12 X 3 = 36

12 X 4 = 48

12 X 5 = 60

12 X 6 = 72

12 X 7 = 84

Luego,  = {0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84...}

1. Determinar de qué números son múltiplos, los siguientes conjuntos:
2.  = {..., 36, 45, 54, 63, 72, 81, ...}
3.  = {..., 99, 110, 121, 132, 143, 154, ...}
4.  = {..., 90, 105, 120, 135, 150, 165, ...}

Solución:

1. a = 9
2. b = 11
3. c = 15
4. Determinar cuáles de los siguientes números son múltiplos de 3, múltiplos de 5 y múltiplos de 3 y 5 simultáneamente.

* 36
* 120
* 225
* 1.025
* 2.050

Solución

* Múltiplos de 3:

36 pues 12 X 3 = 36

120 pues 40 X 3 = 120

225 pues 75 X 3 = 225

1.035 pues 345 X 3 = 1.035

* Múltiplos de 5:

120 pues 24 X 5 = 120

225 pues 45 X 5 = 225

1.035 pues 207 X 5 = 1.035

2.050 pues 410 X 5 = 2.050

* Múltiplos de 3 y 5:

225 pues 75 X 3 = 225 y 45 X 5 = 225

120 pues 40 X 3 = 120 y 24 X 5 = 120

1.035 pues 345 X 3 = 1.035 y 207 X 5 = 1.035

1. Mario tiene en su alcancía entre 200 y 220 monedas. Si se sabe que el número de monedas que tiene es múltiplo de 3 y múltiplo de 7, ¿cuántas monedas hay en la alcancía?

Solución

Los múltiplos de 3 entre 200 y 220 son: 201, 204, 207, 210, 213, 216 y 219. Los múltiplos de 7 entre 200 y 220 son: 203, 210 y 217. Luego, el número que cumple con las dos condiciones es 210.

### Práctica lo aprendido

1. Relacionar el grupo 1 con sus múltiplos correspondientes.

Grupo 1:

1. 
2. 
3. 
4. 

Múltiplos:

1. {..., 18, 24, 30, 36, 42, ...}
2. {..., 24, 27, 30, 33, 36, ...}
3. {..., 24, 36, 48, 60, 72, ...}
4. {..., 18, 27, 36, 45, 54, ...}
5. Encerrar el número que no es múl­tiplo del número indicado.
6.  = {..., 8, 10, 12, 14, 17, 18, ...}
7. = {..., 42, 56, 60, 84, 98, ...}
8.  = {..., 72, 90, 108, 128, 144, ...}
9.  = {..., 69, 92, 117, 138, ...}
10. En un torneo de fútbol se asignan pun­tajes a los equipos de la siguiente forma: 5 por parti­do ganado, 3 por partido empatado y 2 por partido perdido.
11. El puntaje de los Lagartos está entre 40 y 50. Además, es múltiplo de 3 y 5. ¿Cuál es el puntaje de los Lagartos?
12. El equipo de los Invencibles ganó tres partidos, empató 2 y perdió 1. ¿Cuál es el puntaje de los Invencibles?, ¿de qué números es múltiplo?
13. El puntaje de las Panteras no superó los 35 puntos. Además, es múltiplo de 2, 3 y 5. ¿Cuál es el puntaje de las Panteras?
14. Un cajero automático utiliza billetes cuya denomi­nación es $10.000, $20.000 y $50.000. ¿Cuántos billetes  
    y de qué denominación entregará a una persona que hace un retiro de $600.000 y que además recibe la  
    menor cantidad de billetes?
15. La longitud que avanza en un paso una persona es 60 cm. Si su paso es constante, ¿es posible que haya cami­nado exactamente cuatro kilómetros?
16. Escribir un número que cumpla cada condición.
17. Múltiplo de 4 y de 5 entre 631 y 698.
18. Múltiplo de 7 y 10 entre 250 y 320.
19. Múltiplo de 4, 6 y 13 entre 280 y 350.

## DIVISORES

Los divisores de un número se pueden obtener identificando las multiplicaciones cuyo pro­ducto sea dicho número. Por ejemplo, para hallar los diviso­res de 16 se identifican las multiplicaciones cuyo producto sea 16. Así,

* 1 X 16
* 2 X 8
* 4 X 4

Luego, los divisores de 16 son 1, 2, 4, 8 y 16.

El conjunto de divisores de un número a, se simboliza , y es el conjunto de todos los números que dividen exactamente a dicho número.

Por ejem­plo, el conjunto de todos los divisores del número 8 se simbolizan  y se representan de la siguiente manera:

 = {1, 2, 4, 8} pues,

* 8  1 = 8
* 8  2 = 4
* 8  4 = 2
* 8  8 = 1

El conjunto de divisores de un número a cumple las siguientes propie­dades:

1. El número uno siempre pertenece al conjunto, pues todo número divi­dido entre uno da como resultado el mismo número, es decir, a  1 = a.

Por ejemplo, 1 es divisor de 9 porque 9  1=9.

1. El número a siempre pertenece al conjunto , pues todo número divi­dido entre sí mismo da como resultado 1, es decir, a  a = 1.

Por ejemplo, 11 es divisor de 11 porque 11  11 = 1.

1. El conjunto de los divisores de cualquier número natural es finito.

ALGO IMPORTANTE: Divisores propios: conjunto de divisores que no incluyen a dicho número. Por ejemplo, los divisores propios de 12 son 1, 2, 3, 4 y 6.

Ejemplo:

1. Hallar los divisores de cada uno de los siguientes números:
2. 20
3. 24

Solución

1.  = {1, 2, 4, 5, 10, 20} pues se verifica que,

* 20  4 = 5
* 20  5 = 4
* 20  1 = 20
* 20  2 = 10
* 20  10 = 2
* 20  20 = 1

1.  = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24} pues se verifica que,

* 24  1 = 24
* 24  2 = 12
* 24  3 = 8
* 24  4 = 6
* 24  6 = 4
* 24  8 = 3
* 24  12 = 2
* 24  24 = 1

1. Un número perfecto es aquel que es igual a la suma de todos sus divi­sores propios. Por ejemplo, el número 6 es perfecto, puesto que la suma de 1, 2 y 3, sus divisores propios, es 6. Determinar si cada uno de los siguientes números son perfectos:
2. 28
3. 36

Solución

1. Los divisores propios de 28 son 1, 2, 4, 7 y 14. Al efectuar la suma de dichos  
   divisores se tiene que, 1 + 2 + 4 + 7 +14 = 28

Luego, 28 es un número perfecto.

1. Los divisores propios de 36 son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12 y 18. Al efectuar la suma de dichos divisores se tiene que: 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 +12+ 18 = 55

Luego, 36 no es un número perfecto.

1. Dos números son amigos cuando la suma de los divisores propios de cada uno, da como resultado el otro. Por ejemplo, los números 220 y 284 son números que cumplen esta propiedad:

*  = {1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110}

1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284

*  = {1, 2, 4, 71, 142}

1. + 2 + 4 + 71 + 142 = 220
2. Determinar si los números 1.184 y 1.210 son números amigos.

Solución

1. Los divisores propios de 1.184 son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592.

Al efectuar la suma de dichos divisores se tiene que:

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1.210

Los divisores propios de 1.210 son 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605.

Al efectuar la suma de dichos divisores se tiene que,

1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1.184

Luego, los números 1.184 y 1.210 son números amigos.

### Práctica lo aprendido

1. Completar la siguiente tabla.

Tabla 61: Divisores

| Número | Divisores |
| --- | --- |
| 8 |  |
|  | 7, 3, 21, 1 |
| 70 |  |
|  | 10, 5, 1, 2, 25, 50 |
| 81 |  |
|  | 18, 1, 3, 6, 12, 36, 4, 2, 9 |
| 25 |  |
|  | 6, 2, 3, 9, 1, 18 |
| 100 |  |
|  | 2, 1, 26, 13 |

1. Completar las siguientes frases con las palabras múltiplo o divisor. Luego, justificar cada afirmación.
2. El cero no es \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ de ningún número.
3. Todo número es \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ de sí mismo y de la unidad.
4. El 24 es \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ de 8.
5. Todo número que es \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ de otro, lo es de los de este.
6. Encontrar números que cumplan con las siguientes condiciones.
7. cinco números que tenga tres divisores.
8. cinco números que tenga dos divisores.
9. cinco números cuyos divisores diferentes de 1 sean pares.
10. cinco números que sean divisibles entre 2 y 3.
11. Escribir V si la afirmación es verda­dera, o F, si es falsa. En caso de ser falsa presentar un ejemplo que lo justifique.
12. Si a es divisor de b y c, entonces, es divisor de b + c.
13. Si a es divisor de b, entonces, a no es divisor de los múltiplos de b.
14. Si a1 + a2 + a3 + a4 son múltiplos de a entonces, a1 + a2 + a3 + a4 es múltiplo de a.
15. Si a es divisor de b y c, entonces, a es divisor de b – c donde b > c.
16. En una clase hay 35 estudiantes. ¿De cuántas for­mas se pueden agrupar de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de estudiantes?

## CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Los criterios de divisibilidad son técnicas con las cuales se puede deter­minar, de manera rápida y sencilla, cuándo un número es divisible entre otro. Los criterios de divisibilidad comúnmente utilizados son:

* Divisibilidad entre dos. Un número es divisible entre dos, cuando su última cifra es cero o par. Por ejemplo, el número 16 es divisible entre 2 pues su última cifra 6, es un número par.
* Divisibilidad entre tres. Un número es divisible entre tres si la suma de sus cifras es múltiplo de tres. Por ejemplo, el número 36 es divisi­ble entre 3 pues 3 + 6 = 9 y 9 es múltiplo de 3.
* Divisibilidad entre cuatro. Un número es divisible entre cuatro, cuan­do sus dos últimas cifras son ceros o un múltiplo de cuatro. Por ejem­plo, el número 128 es divisible entre 4 pues 28 es múltiplo de 4.
* Divisibilidad entre cinco. Un número es divisible entre cinco, cuando su última cifra es cero o cinco. Por ejemplo, 75 es divisible entre 5 pues su última cifra es 5.
* Divisibilidad entre seis. Un número es divisible entre seis, si es divisi­ble entre dos y entre tres. Por ejemplo, 24 es divisible entre 2 pues su última cifra es par, y es divisible entre 3 pues la suma de sus cifras 2 + 4 = 6 es múltiplo de 3. Por lo tanto, 24 es divisible entre 6.
* Divisibilidad entre nueve. Un número es divisible entre nueve, si la suma de sus cifras es múltiplo de nueve. Por ejemplo, el número 189 es divisible entre 9 pues 1 + 8 + 9 = 18 y 18 es múltiplo de 9.
* Divisibilidad entre diez. Un número es divisible entre diez, si su últi­ma cifra es cero. Por ejemplo, 80 es divisible entre 10 pues su última cifra es 0.

Los pitagóricos estudiaron Las diversas propiedades de algunos números, entre los que se encon­traron los números amigos. El menor par de números amigos, 220 y 284, fue el único par de núme­ros conocido por ellos. Siglos más tarde, Fierre de Fermat (1601-1665) descubrió un segundo par de números amigos: 17.296 y 18.416. Más adelante, Rene Descartes (1596-1650) descubrió un nuevo par de números amigos: 9.363.584 y 9.437.056.

Otros números amigos son:

* 2.620 y 2.924
* 6.232 y 6.368

**Ejemplo:**

1. Utilizar los criterios de divisibilidad para determinar si el número 540 es divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 9 ó 10.

* Es divisible entre 2, pues su última cifra es 0.
* Es divisible entre 3, pues 5 + 4 + 0 = 9, y9 es múltiplo de 3.
* Es divisible entre 4, pues 40 es múltiplo de 4.
* Es divisible entre 5, pues su última cifra es 0.
* Es divisible entre 6, pues es divisible entre 2 y 3.
* Es divisible entre 9, pues 5 + 4 + 0 = 9, y9 es múltiplo de 9.
* Es divisible entre 10, pues su última cifra es 0.

1. Escribir la cifra adecuada en cada número para que cumpla con el criterio de divisibilidad dado.
2. 3\_25 es divisible entre 3
3. 52\_6 es divisible entre 4

**Solución:**

1. 3\_25 es divisible entre 3.

Para que el número sea divisible entre 3 se debe cumplir que la suma de sus cifras sea múltiplo de 3. Así, los números 2, 5 y 8 cumplen con la con­dición dada.

1. 52\_6 es divisible entre 4.

Para que el número sea divisible entre 4 se debe cumplir que el número formado por sus dos últimas cifras sea múltiplo de 4. Así, los números 1, 3, 5, 7 y 9 cumplen con la condición dada.

1. Utilizar los criterios de divisibilidad, para determinar si la afirma­ción es verdadera o falsa.

* Si 18 es divisible entre 3 y 18 es divisible entre 9, entonces 18 es divisible entre 3 X 9 = 27.

**Solución**

La afirmación es falsa, pues 27 no divide a 18. Luego, no es posible concluir que si dos números son divisores de un número, el producto de ellos será divisor de dicho número.

### Práctica lo aprendido

1. Marcar con x la casilla correspondiente.

Tabla 62: Selección de Divisores

| Números | 2 | 3 | 6 | 5 | 10 | 4 | 9 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 48 |  |  |  |  |  |  |  |
| 824 |  |  |  |  |  |  |  |
| 108 |  |  |  |  |  |  |  |
| 125 |  |  |  |  |  |  |  |
| 54 |  |  |  |  |  |  |  |
| 153 |  |  |  |  |  |  |  |
| 90 |  |  |  |  |  |  |  |
| 300 |  |  |  |  |  |  |  |
| 639 |  |  |  |  |  |  |  |
| 100 |  |  |  |  |  |  |  |

1. Eliminar los dígitos necesarios para obtener un número de tres cifras que cumplan con las condiciones dadas.

* Divisible entre 3

1. 568.934
2. 9.017.345
3. 5.487.327

* Divisible entre 6

1. 56.793.210
2. 2.348.675
3. 9.321.604

* Divisible entre 4

1. 640.793
2. 831.429
3. 107.432
4. En una bandeja de 40 metros cuadrados se quieren poner galletas de distintos tamaños sin que se solapen unas con otras.
5. ¿Cuántas galletas cuadradas de 2 cm X 2 cm caben?
6. Si se hacen galletas de 4 cm X 2 cm, ¿queda espacio libre en la bandeja?
7. ¿Cuántas galletas de 4 cm X 2 cm menos que de 2 cm X 2 cm se pueden ubicar en la bandeja?
8. Si se quieren hacer galletas cuadradas lo más gran­ des posibles de tal manera que no quede espacio en la bandeja, ¿de qué dimensiones se deberían hacer? ¿Cuántas galletas serían?
9. Es posible poner galletas de 3 cm X 2 cm de tal forma que no quede espacio en la bandeja. Justificar la respuesta.
10. Representar una bandeja cuadrada que cumpla la condición dada.
11. Se pueden poner 16 galletas de 3 cm X 3 cm.
12. ¿Cuáles son las dimensiones de la bandeja?
13. Marcar V si la afirmación es verda­dera o X si no lo es. Justificar la respuesta.
14. Un número divisible entre cinco no puede ser divisible entre tres.
15. Todo número divisible entre 18, es divisible entre 2 y 9.
16. Todo número divisible entre cuatro, también es divisible entre 16.
17. Un número divisible entre dos puede ser divi­sible entre cinco.
18. Si un número es divisible entre a y b a la vez, también es divisible entre a + b.
19. Hallar el valor de x para que se cum­pla la condición dada.
20. X a la 5 es divisible entre tres y entre cinco.
21. X a la 4 X 3 es divisible entre dos, tres y seis.
22. X a la 6 + 4 es divisible entre dos, cuatro, cinco y diez.
23. X a la 3 + x a la 2 es divisible entre dos, tres, seis y nueve.
24. Con 60 cuadrados, ¿cuántos rectángulos de formas distintas y sin que sobren cuadrados se pueden formar?
25. ¿Cuál es el menor número que hay que sumar a 937 para obtener un número divisible entre 6?
26. Una fábrica de dulces produce cierta cantidad dia­ria que empacan en bolsas, de tal forma que la canti­dad de dulces en cada bolsa es divisible entre 11 y 10 y no mayor a 150 dulces. Si utilizan 220 bolsas, ¿cuán­  
    tos dulces se producen en un día?
27. Lucía quiere preparar 47 emparedados para sus invitados. Si el pan viene en bolsas de seis unidades cada una, el que­so y el jamón en empaques de 15 y 20 unidades, respectiva­mente, ¿cuál será el mínimo número de paquetes que debe comprar para preparar los emparedados? ¿Cuántas unidades sobrarán de cada producto?

## NÚMEROS PRIMOS

Un número es primo cuando únicamente tiene dos divisores: 1 y él mismo.

Por ejemplo, 13 es un número primo ya que sus únicos divisores son 1 y 13.

Para hallar los números primos, Eratóstenes, famoso matemático del siglo III a.C., ideó un método conocido como la criba de Eratóstenes, tabla que permite hallar los números primos hasta un determinado número. Para construir dicha tabla, es necesario tener en cuenta los pasos que se describen en la criba de Eratóstenes.

CRIBA DE ERATÓSTENES

Se escribe la serie de los números naturales desde el número uno hasta el número que se deseen encontrar los primos. En este caso, se hallarán los números primos del 1 al 100. Luego, se tacha el número 1 y a partir del número 2 (único primo par), se tachan todos los múltiplos de 2. Así,

Tabla 63: Criba de Eratóstenes

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

De igual manera, se hace con los números 3, 5, 7... Y sus respectivos múl­tiplos.

Tabla 64: Números Primos

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Así, los números que quedan sin tachar son los números primos corres­pondientes hasta el número dado. De esta manera, los números primos menores que 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

NÚMEROS COMPUESTOS

Se dice que un número es compuesto, si tiene más de dos divisores. Por ejemplo, el número 15 tiene como divisores  = {1, 3, 5, 15}, luego es un número compuesto por tener más de dos divisores.

En la criba de Eratóstenes, toda la serie de números sombreados (sin con­tar el número 1) son números compuestos.

Ni el uno ni el cero se consideran números primos porque el uno tiene un único divisor que es él mismo, y el cero tiene infinitos divisores.

### Práctica lo aprendido

1. Escribir V, si la afirmación es verda­dera o F, si es falsa.
2. Todo número compuesto tiene por lo menos un factor primo mayor que 1.
3. La suma de dos números primos es un núme­ro primo.
4. El producto de un número primo y uno com­puesto es un número compuesto.
5. Todos los números compuestos son pares.
6. Todo número primo que divide al producto de varios factores divide por lo menos a uno de ellos.  
   6. Todos los números primos son impares.
7. Expresar los siguientes números como una suma de varios números primos.
8. 90
9. 36
10. 52
11. 85
12. 76
13. 303
14. 324
15. 107
16. 255
17. Dos números son primos gemelos cuando la diferencia entre los dos es 2. Ejemplo: 3 y 5. 16. Hallar cinco pares de primos gemelos.
18. Con la ecuación 4k + 3, k  N es posi­ble escribir algunos números primos y algunos núme­ros compuestos. Con esta información completa la siguiente tabla.

Tabla 65: Primos y Compuestos.

| Número | k | Primo | Compuesto |
| --- | --- | --- | --- |
| 23 |  | x |  |
|  |  |  | X |
|  | 10 |  |  |
|  | 8 |  |  |
|  |  |  | x |
| 63 |  |  |  |

1. ¿Cuál es el número que equivale al triple del menor número primo aumentado en 13? ¿El número que se obtiene es primo o compuesto? ¿Por qué?
2. ¿En cuánto se debe aumentar 109 para obtener el número primo más cercano a este?
3. Encontrar tres números compuestos impares divi­sibles entre 11.
4. Encontrar tres números compuestos pares divisi­bles entre 7 y 14.

## DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Todo número compuesto se puede expresar como el producto de dos o más factores primos. Para descomponer un número en factores primos, se divide sucesivamente el número dado entre cada uno de los números primos hasta llegar al número 1 como último cociente.

Ejemplo

1. Descomponer los siguientes números en factores primos:
2. 60
3. 525

Solución:

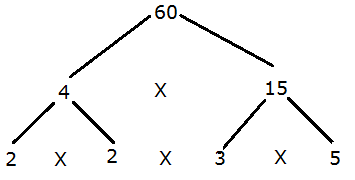
1. 60.

* 60 es divisible entre 2. Entonces 60  2 = 30
* 30 es divisible entre 2. Entonces 30  2 = 15
* 15 es divisible entre 3. Entonces 15  3 = 5
* 5 es divisible entre 5. Entonces 5  5 = 1

Así, 60 = .

Otra forma de descomponer un número en factores primos es utilizando un diagrama de árbol. Así:

Imagen 33: Descomposición del 60.

****

Descripción imagen: 60 se desprende a izquierda el 4, a derecha el 15, entre estos el signo X. Del 4 se desprende a izquierda el 2 y a derecha el 2, entre estos el signo X. Del 15 se desprende a izquierda el 3 y a derecha el 5, entre estos el signo X. El producto de los números que se desprenden tanto del 4 como del 15 corresponden a la descomposición del 60.

Se busca cualquier par de números cuyo producto sea el número dado.

Se sigue la descomposición hasta que todos sean factores primos.

Luego, 60 = .

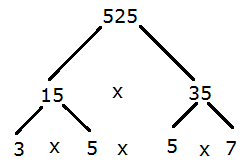
1. 525

* 525 es divisible entre 3. Entonces 525  3 = 175
* 175 es divisible entre 5. Entonces 175  5 = 35
* 35 es divisible entre 5. Entonces 35  5 = 7
* 7 es divisible entre 7. Entonces 7  7 = 1

Así, 525 = 

Por diagrama de árbol, se tiene que,

Imagen 34: Descomposición del 525

****

Descripción imagen: 525 se desprende a izquierda el 15, a derecha el 35, entre estos el signo X. Del 15 se desprende a izquierda el 3 y a derecha el 5, entre estos el signo X. Del 35 se desprende a izquierda el 5 y a derecha el 7, entre estos el signo X. El producto de los números que se desprenden tanto del 15 como del 35 corresponden a la descomposición del 525.

Luego, 525 = 

### Práctica lo aprendido

1. Relacionar cada número con su descomposición en diferentes factores y factores primos.

Números

1. 150
2. 600
3. 225
4. 80
5. 1.550
6. 128
7. 40
8. 1.350
9. 5.000

Factores

1. 10 X 4 X 2
2. 5 X 2 X 4
3. 40 X 3 X 5
4. 155 X 5 X 2
5. 16 X 4 X 2
6. 45 X 5
7. 2 X 15 X 5
8. 125 X 10 X 4
9. 10 X 15 X 9

Descomposición

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. Verifica si la descomposición en factores primos es correcta, si no lo es corrígele.
11. 49.000 = 
12. 1.600 = 
13. 37.800 = 
14. 2.352 = 
15. 18.200 = 
16. 1.225 = 
17. 200 = 
18. 4.096 = 
19. 648 = 
20. 5.488 = 
21. 22.400 = 
22. 3.861 = 
23. 37.800 = 
24. 11.907 = 
25. Descomponer en factores primos los siguientes números.
26. 640
27. 63
28. 1.800
29. 420
30. 7.000
31. 90
32. 1.144
33. 75
34. 8.750
35. Seleccionar los números que son factores primos del número dado.

Tabla 66: Identificación de Divisores.

| Números | a | b | C | d | e | f | g | h | I |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 900 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 8 | 11 | 13 |
| 1.008 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 8 | 11 | 13 |
| 567 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 8 | 11 | 13 |
| 5.720 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 8 | 11 | 13 |
| 936 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 8 | 11 | 13 |

## MÁXIMO COMÚN DIVISOR PENSAMIENTO NUMÉRICO

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor de los divi­sores comunes de dichos números. Por ejemplo, para hallar el máximo común divisor de los números 8, 12 y 16 se hallan los divisores de cada número, se toman los divisores comunes y se escoge el mayor. Así,

= {1, 2, 4, 8}

 = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

 = {1, 2, 4, 8, 16}

En este caso, los divisores comunes son el 1, el 2 y el 4. Así, el máximo común divisor entre 8, 12 y 16 es 4 y se simboliza como

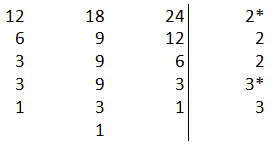
mcd (8, 12, 16) = 4

Otra forma de hallar el máximo común divisor de dos o más números, consiste en descomponer simultáneamente dichos números en factores primos. El máximo común divisor será el producto de sus divisores comunes.

La descomposición en factores primos de una serie de números se realiza de la siguiente manera:

1. Organización de los números de manera horizontal.
2. A la izquierda del ultimo número se separa con una línea vertical los divisores y se escribe el primer divisor.
3. Debajo de los números se escribe el resultado de la división de cada uno de estos por el primer divisor en caso de que esta sea posible, si no lo es, se escribe el mismo número.
4. Cuando se evacua la división por el divisor 2, se continúa de manera accedente con los números primos que sea posible.
5. Cuando se obtenga cociente 1 para cada uno de los números iniciales, se finaliza el proceso.
6. Se marcan con asterisco los números que son divisores comunes a todos.

Imagen 35: Obtención mcd entre 12, 18 y 24

****

Descripción Imagen: 12, 18 24 organizados horizontalmente a la derecha del 24 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada y a la izquierda de esta pero en el mismo nivel el primer divisor que es 2\*. Debajo de cada uno de los 3 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: 6, 9, 12, después de la línea el 2, resultados 3, 9, 6, después de la línea el 2, resultados 3, 9, 3, después de la línea el 3\*, resultados 1, 3, 1, después de la línea el 3, resultados 1 (debajo solo del 3).

El 2 es divisor de todos los números (divisor común).

El 3 es divisor de todos los números (divisor común).

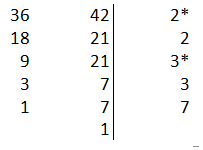
Luego, mcd (12, 18, 24) = 2 X 3 = 6.

Ejemplo

1. Hallar el máximo común divisor de los siguientes números:
2. 36 y 42
3. 30, 45 y 60

Solución

Imagen 36: Descomposición de 36 y 42



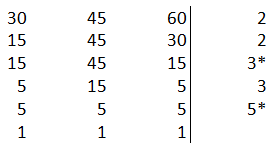
Descripción Imagen: 36, 42 organizados horizontalmente a la derecha del 42 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada, a la izquierda de esta el número 2\*. Debajo de cada uno de los 2 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: resultados 18, 21, después de la línea el 2, resultados 9, 21 después de la línea el 3\*, resultados 3, 7 después de la línea el 3, resultados 1, 7 después de la línea el 7, resultados 1 (debajo solo del 7).

El 2\* es divisor de 36 y 42 (divisor común)

El 3\* es divisor de 36 y 42 (divisor común)

Luego, mcd (36, 42) = 2 X 3 = 6

Imagen 37: Descomposición del 30, 45 y 60.

1. ****

Descripción Imagen: 30, 45, 60 organizados horizontalmente a la derecha del 60 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada, a la izquierda de esta el número 2. Debajo de cada uno de los 3 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: resultados 15, 45, 30, después de la línea el 2, resultados 15, 45, 15 después de la línea el 3\*, resultados 5, 5, 5 después de la línea el 5\*, resultados 1, 1, 1.

El 3 es divisor de 30, 45 y 60 (divisor común)

El 5 es divisor de 30, 45 y 60 (divisor común)

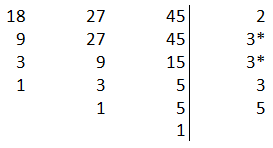
Luego, mcd (30, 45, 60) = 3 X 5 = 15

1. Cristina tiene 18 rosas amarillas, 27 rosas blancas y 45 rosas rojas para hacer ramos.
2. ¿Cuál es el mayor número de rosas de igual color que puede poner en  
   cada ramo sin que le sobre ninguna?
3. ¿Cuántos ramos salen de cada color?

Solución

1. Se halla el máximo común divisor de 18, 27 y 45, para determinar el mayor número de rosas que puede poner Cristina en cada ramo. Así,

Imagen 38: Descomposición de 18, 27, 45.

****

Descripción Imagen: 18, 27, 45 organizados horizontalmente a la derecha del 45 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada, a la izquierda de esta el número 2. Debajo de cada uno de los 3 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: resultados 9, 27, 45, después de la línea el 3\*, resultados 3, 9, 15 después de la línea el 3\*, resultados 1, 3, 5 después de la línea el 3, resultados 1, 5, debajo del 3 y del 5, después de la línea el 5, debajo del 5 el 1.

Luego, mcd (18, 27, 45) =  = 9. Entonces, el mayor número de rosas que debe poner Cristina en cada ramo es 9.

1. Para determinar cuántos ramos saldrán de cada color, basta con dividir cada número de rosas de igual color entre el máximo común divisor:

* 18  9 = 2 ramos de rosas amarillas
* 27  9 = 3 ramos de rosas blancas
* 45  9 = 5 ramos de rosas rojas

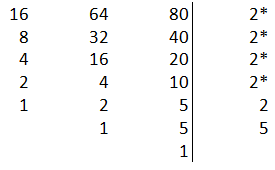
Así, Cristina obtendrá 2 ramos de rosas amarillas, 3 ramos de rosas blancas y 5 ramos de rosas rojas.

1. Una persona tiene tres terrenos de áreas 16 , 64  y 80 . Desea fraccionarlos de tal manera que queden, respectivamente, lotes iguales y de la mayor superficie posible.
2. ¿Cuál será el área máxima de cada lote?
3. ¿Cuántos lotes se obtendrán de cada terreno y cuántos en total?

Solución

1. Se halla el máximo común divisor de 16, 64 y 80. Así,

Imagen 39: Descomposición del 16, 64 y 80.

****

Descripción Imagen: 16, 64, 80 organizados horizontalmente a la derecha del 80 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada, a la izquierda de esta el número 2\*. Debajo de cada uno de los 3 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: resultados 8, 32, 40, después de la línea el 2\*, resultados 4, 16, 20 después de la línea el 2\*, resultados 2, 4, 10 después de la línea el 2\*, resultados 1, 2, 5, después de la línea el 2, resultados 1, 5, debajo del 2 y 5 , después de la línea el 5, debajo del 5 el 1.

Luego, mcd (16, 64, 80) =  = 16. Entonces, el área máxima de cada lote es de 16 .

1. Para determinar el número de lotes que saldrán de cada terreno, se divide el área de cada lote entre el máximo común divisor.

* 16  16 = 1 lote del terreno de 16 
* 64  16 = 4 lotes del terreno de 64 
* 80  16 = 5 lotes del terreno de 80 

Así, en total saldrán 1 + 4 + 5 = 10 lotes de 16  cada uno.

### Práctica lo aprendido

1. Calcular el mcd de cada grupo de nú­meros.
2. 33, 77
3. 54, 76 y 114
4. 57, 133 y 532
5. 600, 1.200 y 1.800
6. 171, 342 y 684
7. 200, 150 y 25
8. 500 y 900
9. 840, 960 y 720
10. 35, 50 y 120
11. Escribir el número D que hace falta para que la igualdad se cumpla.
12. mcd(14D5, 37D) = 27
13. mcd(13D, 2D, 30) = 5
14. mcd(D0, 3D, D6) = 6
15. mcd(1D0, 46D) = 4
16. Un triángulo tiene 18  de área.
17. ¿Es posible formar el ABC con triángulos de 4  sin que se solapen entre ellos? Justificar la respuesta.
18. ¿Es posible formar el ABC con triángulos de 9  sin que se solapen entre ellos?  
    Justificar.
19. ¿Es posible formar el ABC con triángulos de 2  y 3  sin que se solapen entre ellos? Si es así, ¿cuántos triángulos se necesitarán de cada uno?
20. En la siguiente tabla se registraron las dimensiones de cuatro pistas de baile.

Tabla 67: Largo y Ancho de Pistas.

| Pista | Largo | Ancho |
| --- | --- | --- |
| Pista A | 12 | 4 |
| Pista B | 15 | 6 |
| Pista C | 10 | 5 |
| Pista D | 16 | 7 |

Se quieren poner baldosas cuadradas para recubrir las superficies de las pistas sin que se desperdicie material.

1. ¿Qué dimensiones, como máximo, deben tener las baldosas que recubrirán la pista A? ¿Cuántas se usarán?
2. ¿Qué dimensiones, como máximo, deben tener las baldosas que recubrirán la pista B?
3. ¿Qué dimensiones, como máximo, deben tener las baldosas que recubrirán la pista D?
4. ¿En cuál pista se usarán más baldosas?
5. Escribir cinco ejemplos numéricos pa­ra cada expresión.
6. Si el mcd(a, b) = c, entonces, mcd(,) = 
7. Si el mcd(a, b) = 1, entonces, mcd(a + b, ab) = 1.
8. Si el mcd (b, c) = 1, entonces, mcd(a, bc) = mcd(a, b) X mcd(a, c).
9. Si el mcd(a, b) = 1 y b es múltiplo de c, entonces, mcd(a, c) = 1.
10. Dos números a y b se dicen primos relativos si mcd(a, b) = 1. Escoger siete parejas de primos relativos entre los siguientes números.

* 36
* 45
* 66
* 18
* 227
* 24
* 99
* 78
* 31
* 17
* 312
* 24
* 67
* 315
* 46
* 35
* 36

1. Encontrar los números pedidos.
2. mcd(a, b) = 14
3. mcd(a, b) = 8
4. mcd(a, b) = 210 tal que 250 < a < 520 y 580 < b < 650.
5. En un campamento hay 48 mujeres y 56 hombres. Hay que formar grupos con igual cantidad de inte­grantes, de manera que en cada uno la cantidad de hombres sea la misma y la cantidad de mujeres tam­bién. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se pue­den armar y cómo estarán formados?
6. Xiomara tiene 45 piedras azules, 60 piedras rojas y 30 piedras verdes. Si ella quiere hacer el mayor núme­ro de collares iguales sin que sobre ninguna piedra, ¿cuántos collares iguales puede hacer? ¿Cuántas pie­dras de cada color tendrá cada collar?
7. Se desea cortar los siguientes trozos de madera en partes iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál se­rá la longitud máxima de cada pieza? ¿Cuántas partes se obtendrán de cada trozo?

* Trozo 1: 360 cm
* Trozo 2: 480 cm
* Trozo 3: 240 cm

## MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor múltiplo común diferente de O de dichos números. Por ejemplo, para hallar el mínimo común múltiplo de los números 4, 8 y 12, se hallan los múlti­plos de cada número, se toman los múltiplos comunes y se escoge el menor. Así:

 = {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, ...}

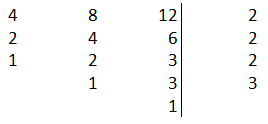
 = {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56,...}

 = {0, 12, 24, 36, 48, 60,...}

En este caso, los múltiplos comunes son el 24 y el 48. Así, el mínimo común múltiplo entre 4, 8 y 12 es 24 y se simboliza como mcm (4, 8, 12) = 24.

Otra forma de hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números, consiste en descomponerlos simultáneamente en factores primos, donde el mcm será el producto de estos factores. Así:

Imagen 40: Descomposición del 4, 8 y 12.

****

Descripción Imagen: 4, 8, 12 organizados horizontalmente a la derecha del 12 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada, a la izquierda de esta el número 2. Debajo de cada uno de los 3 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: resultados 2, 4, 6, después de la línea el 2, resultados 1, 2, 3 después de la línea el 2, resultados 1, 3 debajo del 2 y del 3, después de la línea el 3, resultado 1.

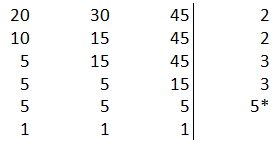
Luego, mcd (4, 8, 12) = 2 X 2 X 2 X 3 =  X 3 = 24.

Ejemplo

1. Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:
2. 20, 30 y 45
3. 16, 24, 80 y 120

Solución:

Imagen 41: Descomposición del 20, 30 y 45.

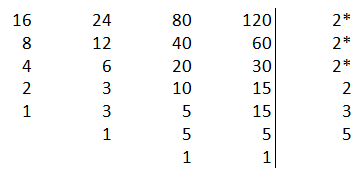
1. 

Descripción Imagen: 20, 30, 45 organizados horizontalmente a la derecha del 45 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada, a la izquierda de esta el número 2. Debajo de cada uno de los 3 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: resultados 10, 15, 45, después de la línea el 2, resultados 5, 15, 45 después de la línea el 3, resultados 5, 5, 15 después de la línea el 3, resultados 5, 5, 5 después de la línea el 5\*, resultados 1, 1, 1.

El 5 los divide a los tres.

Luego, mcd (20, 30, 45) = 5 y mcm (20, 30, 45) =  X  X 5 = 180.

Imagen 42: Descomposición del 16, 24, 80 y 120.

1. ****

Descripción Imagen: 16, 24, 80 y 120 organizados horizontalmente a la derecha del 120 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada, a la izquierda de esta el número 2\*. Debajo de cada uno de los 3 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: resultados 8, 12, 40, 60, después de la línea el 2\*, resultados 4, 6, 20, 30 después de la línea el 2\*, resultados 2, 3, 10, 15 después de la línea el 2, resultados 1, 3, 5, 15, después de la línea el 3, resultados 1, 5, 5, debajo del 3, 5 y 15. Después de la línea el 5, debajo del 5, 5 el 1, 1.

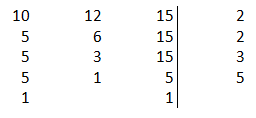
Luego, mcd (16, 24, 80, 120) = = 8 y mcm (16, 24, 80, 120) =  X 3 X 5 = 240.

1. Una sirena suena cada 10 segundos, otra cada 12 segundos y una ter­cera, cada 15 segundos. Si a las 6:00 a.m. coincidieron las tres, ¿a qué hora volverán a sonar nuevamente al mismo tiempo?

Solución

Se halla el mínimo común múltiplo entre 10, 12 y 15.

Imagen 43: Descomposición del 10, 12 y 15.

****

Descripción Imagen: 10, 12 y 15 organizados horizontalmente a la derecha del 15 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada, a la izquierda de esta el número 2. Debajo de cada uno de los 3 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: resultados 5, 6, 15, después de la línea el 2, resultados 5, 3, 15, después de la línea el 3, resultados 5, 1, 5 después de la línea el 5, resultados 1 y 1, debajo del 5 y 5.

Luego, mcm (10, 12, 15) =  X 3 X 5 = 60.

Las sirenas volverán a sonar nue­vamente en 60 segundos (1 minuto), es decir, a las 6:01 a.m.

1. Los cometas son cuerpos celestes formados por un núcleo de hielo y roca rodeado a su vez por una atmósfera nebulosa llamada cabe­llera o cola.

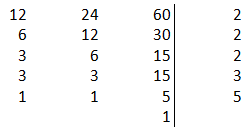
A medida que un cometa se aproxima al Sol, la alta temperatura solar provoca la evaporación del hielo, haciendo que brille en gran manera. La visibilidad de los cometas depende de la longitud de su cola y de su cercanía al Sol y a la Tierra.

Ciertos cometas se acercan a un planeta en determinados períodos de tiempo. Un primer cometa se acerca cada 12 años, un segundo cometa cada 24 años y un tercer cometa, cada 60 años. Si la última vez que se aproximaron fue en 1889, ¿al cabo de cuántos años se vol­verán a encontrar? En ese período de tiempo, ¿cuántas veces habrá pasado cada cometa por dicho planeta?

Solución

En primer lugar, se halla el mínimo común múltiplo entre 12, 24 y 60:

Imagen 44: Descomposición del 12, 24 y 60.

****

**Descripción Imagen:** 12, 24 y 60 organizados horizontalmente a la derecha del 60 se encuentra una línea vertical que está hasta la última división realizada, a la izquierda de esta el número 2. Debajo de cada uno de los 3 números está escrito el resultado de la división por el número primo indicado, de la siguiente manera: resultados 6, 12, 30, después de la línea el 2, resultados 3, 6, 15, después de la línea el 2, resultados 3, 3, 15 después de la línea el 3, resultados 1, 1, 5 después de la línea el 5, debajo del 5 el 1.

Luego, mcm (12, 24, 60) =  X 3 X 5 = 120.

Entonces, los tres cometas se encontrarán al cabo de 120 años, es decir, en el año 2009.

Para determinar cuántas veces habrá pasado cada cometa por dicho planeta, basta con dividir 120 entre cada uno de los períodos de acercamiento al pla­neta. Así:

* Primer cometa 120  12 = 10
* Segundo cometa 120  24 = 5
* Tercer cometa 120  60 = 2

Luego, el primer cometa habrá pasado diez veces, el segundo cometa cinco < veces y el tercer cometa dos veces.

### Práctica lo aprendido

1. Hallar el mcm de los siguientes números:
2. 9 y 27
3. 24 y 58
4. 100 y 70
5. 30 y 45
6. 60 y 180
7. 56, 72 y 34
8. 16, 84 y 13
9. 18, 72 y 32
10. 120, 300 y 90
11. Escribir tres ejemplos numéricos para cada expresión.
12. mcm(a, b) = (a X b)  mcd(a, b)
13. mcd(a, b) = 1, entonces, mcm(a, b) = ab.
14. Sí b es múltiplo de a, entonces, mcm(a, b) = b.
15. En una tabla de 32 columnas se organizaron algunos símbolos que se repiten en forma periódica. A continuación se muestra una parte de la tabla.

Tabla 68: Organización de Símbolos.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | A |  |  | A |  |  | A |
|  | B |  | B |  | B |  | B |  |
|  |  |  | C |  |  |  | C |  |

1. ¿En qué columnas coinciden A y C?
2. ¿En qué columnas coinciden A y B?
3. ¿En qué columnas coinciden A, B y C?
4. ¿Cuál símbolo se repite menor cantidad de veces?, ¿por qué?
5. Para que coincidan A, B y C cuatro veces. ¿Cuántas columnas como mínimo debe tener la tabla?
6. Unir cada grupo de números con su mcm y mcd.

Números

1. 90 y 36
2. 8, 16 y 32
3. 55, 45 y 36
4. 100, 150 y 10
5. 24 y 51
6. 6, 16 y 28
7. 228 y 36

mcm

1. 1.980
2. 408
3. 684
4. 180
5. 336
6. 32
7. 300
8. Una cuerda de 90 cm se marca con colores distintos: con rojo cada 5 cm, con verde cada 10 cm, con azul cada 15 cm. Escribir en qué puntos de la cuerda coinciden los siguientes colores.
9. Rojo y verde
10. Rojo y azul
11. Verde y azul
12. ¿En algún punto coincidirán los tres colores? Justificar la respuesta.
13. En un colegio hay tres tim­bres, uno para preescolar, que suena cada 30 minutos, otro para primaria, que suena cada 45 minutos, y el de bachillerato, que suena cada 60 minutos. Si los tres suenan al tiempo a las 7:00 a.m.:
14. ¿A qué hora volverán a sonar los tres al tiempo?
15. En el momento en que vuelven a sonar los tres tim­bres, ¿cuántas veces habrá sonado el timbre de prima­ria?
16. Si el timbre de preescolar ha sonado 15 veces, ¿qué hora es?
17. ¿A qué horas suenan al tiempo los timbres de pri­maria y bachillerato?
18. El coordinador de preescolar decide alargar la hora del timbre diez minutos más durante la semana cultural. ¿Cuántas veces coincidirá este timbre con el de bachi­llerato?
19. Los vuelos a Medellín salen cada 50 minutos; a Pereira cada dos horas y a Bucaramanga cada cuatro horas. Si a las 7:00 a.m. salieron vuelos para los tres desti­nos, ¿a qué hora volverán a salir simultáneamente?
20. La mamá de Santiago lo inscribió durante sus vacaciones en tres cursos que funcionan de domingo a domingo.

Curso 1:

Pintura: Cada 3 días. Inicia junio 13.

Curso 2:

Guitarra: Cada 2 días. Inicia 13 de Junio

Curso 3:

Natación: Cada 6 días. Inicia 13 de junio.

1. ¿Qué días del mes de junio y julio coincidirán sus clases de pintura, natación y música?
2. ¿Cuántos días durante los meses de junio y julio tendrá dos actividades?
3. ¿Existe días en que sólo realice una actividad? ¿Cuáles son?

# BIBLIOGRAFÍA

1. Estrada, W. (2008). *Delta 6*. Bogotá D.C.: Grupo Editorial Norma.
2. Salgado, D. (2013). *Nuevas Matemáticas*. Bogotá D.C.: Santillana.